RECIPROKE KRYSTALLFORMEN

UND

RECIPROKE KRYSTALLPROJEKTIONEN

INAUGURAL-DISSERTATION

BEI DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

LUDWIGS-UNIVERSITÄT ZU GIESSEN

ZUR ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

EINGEREICHT

VON

MAX SCHWARZMANN

AUS KARLSRUHE.

MIT 9 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG

DRUCK VON J. B. HIRSCHFELD

1897.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Lebenslauf.

Am 18. September 1871 wurde ich, Max Schwarzmann, zu Karlsruhe als Sohn des damaligen Verwaltungsgerichtsrats Walter Schwarzmann geboren. Nach dem Vorschulunterricht besuchte ich das Gymnasium zu Karlsruhe und dann zu Lörrach i. W. bis Untersekunda einschliesslich, um dann 1888 meiner vorwiegenden Neigung zu Mathematik und Naturwissenschaften sowie zu den neueren Sprachen folgend in das Realgymnasium in Karlsruhe überzutreten, aus dem ich Ende Juli 1891 entlassen wurde. Jetzt wandte ich mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften zu, welchem ich von Oktober 1891 bis Juli 1893 als Studierender der Technischen Hochschule zu Karlsruhe oblag. Es hielt mich hier besonders das Studium der darstellenden Geometrie mit dem anregenden Vertreter dieses Faches, dem † Geheime Hofrat Prof. Chr. Wiener fest. Im folgenden Wintersemester Studierender der Universität Freiburg i. Br. und im Sommersemester darauf auf der Universität Heidelberg immatrikuliert, folgte ich dem Angebote des Herrn Professor Dr. Brauns, als Assistent am mineralogischen Institut zu Karlsruhe einzutreten, welche Stelle ich vom Sommer 1894 bis zum Frühjahr 1896 bekleidete. Während dieser Zeit vorwiegend mit der Neuordnung der Mineralogisch-Geologischen Sammlung des Instituts beschäftigt, warf ich mich speziell auf das Studium dieser Fächer, besuchte aber auch nebenbei geodätische Vorlesungen und Übungen. Nach der Berufung des Herrn Professor Dr. Brauns nach Giessen übernahm ich hier wieder die Assistenten-Stelle bei ihm, in welcher Stellung ich mich noch gegenwärtig befinde.

Mit Freude ergreife ich die Gelegenheit, allen meinen Lehrern den besten Dank auszusprechen; besonders den Herren Doll, Haid, Lüroth, Netto, Pasch, Schell, Schröder, Weismann, O. Wiener und Zürn, und gern gedenke ich auch hier in dankbarer Weise meiner leider schon verstorbenen Lehrer A. Knop und Chr. Wiener, welchen ich so viele Anregung und die Vorliebe zu den von ihnen vertretenen Fächern verdanke. Ganz besonderen Dank schulde ich auch den Herren Professoren Dr. Brauns und Dr. Futterer, welche mir während meiner Assistentenzeit ebenso liebenswürdige Vorgesetzte wie anregende Lehrer waren, bei meinen Arbeiten mir mit Rat und That an die Hand gingen und für die Wahl meines Faches den Ausschlag gaben.

SEINEM LIEBEN SCHWAGER

UND VÄTERLICHEN FREUND

INGENIEUR HANS v. MURALT

IN ZÜRICH.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538110_0080

Inhaltsübersicht.

Text.

Seite

Vorwort 1
§ 1. Reciprocität bei den regelmässigen Vielflachen der Geometrie 3
§ 2. Erweiterung der Definition der reciproken Körper für das reguläre System . 4
§ 3. Zu einer in axionometrischer Projektion gegebenen Krystallform den reciproken Körper in gleicher Projektion zu verzeichnen 5
§ 4. Wenn ein Körper des regulären Systems gegeben ist, den reciproken Körper durch Rechnung zu finden 7
§ 5. Geometrisches Ableitungsprincip der verschiedenen Systeme aus dem regulären 14
§ 6. Übertragung der Definition der reciproken Körper auf alle dreiaxigen Systeme 14
§ 7. Konstruktion des reciproken Körpers in den übrigen dreiaxigen Systemen 17
8. Wenn die Indices und die Abstandszahlen eines Körpers des quadratischen, rhombischen, monoklinen oder triklinen Systems gegeben sind, die entsprechenden Grössen des reciproken Körpers zu berechnen 18
§ 9. Übertragung der Definition des reciproken Körpers auf das hexagonale System 19
§ 10. Wenn die Indices und die Abstandszahlen eines hexagonalen Körpers gegeben sind, die Indices und Abstandszahlen des reciproken Körpers zu berechnen 19
§ 11. Kugel-reciproke und axen-ellipsoid-reciproke Körper 21
§ 12. Bezeichnungsweise von Flächen, Ecken und Kanten, um deren Zahlenverhältnisse zum Ausdruck zu bringen 23
§ 13. Tabelle der einfachen geschlossenen Formen und der reciproken Körper derselben 24
§ 14. Physikalische Bedeutung der reciproken Körper 29
§ 15. Die Flächenprojektion 30
§ 16. Eindeutigkeit und Vieldeutigkeit der Flächen- und Polarprojektion . . . 32
§ 17. Beziehung zwischen der Polar- und Flächenprojektion einerseits und der Quenstedtschen Linear-Projektion andererseits 34
§ 18. Konstruktion der Flächenprojektion einer Krystallform mit Hilfe der Quenstedtschen Projektion des reciproken Körpers 34
§ 19. Rein konstruktive Zeichnung eines Körpers in Flächenprojektion 35
§ 20. Allgemeine Bemerkungen zu den Zeichnungen 36
§ 21. Holoëder des regulären Systems und deren reciproke Körper 37
§ 22. Hemiëder des regulären Systems 37
§ 23. Hexagonales System 40
§ 24. Zwillinge 41
§ 25. Anwendung der Flächenprojektion, um günstige Annahmen für Krystallzeichnungen zu erhalten 43
§ 26. Andeutung weiterer Anwendungen der Flächenprojektion 45

Tafeln.

Tafel I. Konstruktion des zu $3O\frac{3}{2}$ reciproken Körpers in Parallelperspektive.
Tafel II, III, IV. Holoëder des regulären Systems und deren reciproke Körper in Flächen- und Polarprojektion.
Tafel V, VI. Hemiëder und Tetartoëder des regulären Systems in Flächenprojektion.
Tafel VII. Das gleiche aus dem hexagonalen System.
Tafel VIII, IX. Körper mit ununterbrochenem Zonenzusammenhang in Polar-, in Flächenprojektion und in Parallelperspektive.
Den Tafeln II—VII sind genaue Einzelerklärungen beigegeben.

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, auf die reciproken Beziehungen von Krystallformen aufmerksam zu machen und dieselben näher zu verfolgen. Es musste dabei zuerst der Begriff der reciproken Krystallformen festgelegt werden, um hierauf auf die Konstruktion und die Berechnung derselben einzugehen. Diese Rechnungen wurden im Gewande der üblichen krystallographischen Symbole ausgeführt. Hierbei hätte in manchem unter Berufung auf die analytische Geometrie kürzer verfahren werden können, da aber die analytische Geometrie sich in der Krystallographie — abgesehen natürlich von dem zünftigen Krystallographen — noch wenig eingebürgert hat und bei dem Chemiker, welcher Krystallographie studiert, eine solche Kenntnis auch nicht vorausgesetzt werden kann, hielt ich es für notwendig, die gebrauchten Sätze der analytischen Geometrie teils streng abzuleiten, teils wenigstens soweit zu erwähnen, dass dieselben plausibel erschienen. Die Arbeit wurde dadurch natürlich vergrössert, doch glaubte ich um so weniger von diesem Grundsatz abgehen zu dürfen, als dieser auch z. B. in dem neu erschienenen Werke von Nies[1]) und in ähnlichen Arbeiten befolgt wurde.

Eine in der Arbeit näher beschriebene und als Flächenprojektion angesprochene Projektionsmethode steht zu der stereographischen Polarprojektion in einer solchen Beziehung, dass ein und dieselbe Zeichnung als Flächen- und als Polarprojektion aufgefasst werden kann und bei diesen Auffassungen zwei reciproke Körper liefert. Die Flächenprojektion ist auch als selbständige Projektion für verschiedene krystallographische Darstellungen von grosser Brauchbarkeit. Bei der Berechnung der Flächenprojektion kommt wieder ihre Beziehung zur Polarprojektion und die Lehre der reciproken Krystallformen zur Geltung.

Eine Reihe von Tafeln dient zur Erläuterung und Ergänzung des Textes. Die stereographischen Projektionen wurden zur Kontrolle einmal durch Konstruktion gefunden, dann wurden aber auch die Kreismittelpunkte berechnet. Die auf die letzte Art gewonnenen Zeichnungen, welche

1) Nies, Dr. A., Allgemeine Krystallbeschreibung etc. Stuttgart 1895.

sehr genau mit den ersten übereinstimmten, dienten zur Reproduktion. Die Einzelerklärungen und näheren Angaben (wie Koordinaten der Kreismittelpunkte etc.) wurden den Abbildungen direkt gegenübergestellt, wodurch einerseits der Text von vielem Detailmaterial entlastet wurde, andererseits die Tafeln grössere Selbständigkeit erhielten.

Dem Herrn Professor Dr. Brauns erlaube ich mir, für das liebenswürdige Interesse und die guten Ratschläge, welche er meiner Arbeit entgegenbrachte, den besten Dank auszusprechen. Desgleichen bin ich dem Herrn Verleger, welcher in so freundlicher Weise meinen Wünschen behufs Aufnahme der vielen Tafeln entgegenkam und dem Schriftchen eine so hübsche Ausstattung angedeihen liess, zu grösstem Dank verpflichtet.

Möge das kleine Werk eine wohlwollende Aufnahme finden!

Giessen, Dezember 1896.

Max Schwarzmann.

§ 1.

Reciprocität bei den regelmässigen Vielflachen der Geometrie.

Die regelmässigen Vielflache der Geometrie zeigen paarweise verglichen gewisse Beziehungen und Uebereinstimmungen in der Anzahl ihrer Flächen, Ecken und Kanten, welche in übersichtlicher Weise in nachfolgender Tabelle[1]) zum Ausdruck kommen, wobei F, E, K bezw. die Anzahl der Flächen, Ecken, Kanten, n, ν bezw. die Anzahl der Ecken in einer Fläche und der Flächen an einer Ecke bedeutet:

Das Vielflach . . .	F	E	K	n	ν
Vierflach . . .	4	4	6	3	3
Sechsflach . . .	6	8	12	4	3
Achtflach . . .	8	6	12	3	4
Zwölfflach	12	20	30	5	3
Zwanzigflach . . .	20	12	30	3	5
Zwanzigeckiges Sternzwölfflach . . .	12	20	30	5	3
Sterneckiges Zwanzigflach	20	12	30	3	5
Zwölfeckiges Sternzwölfflach	12	12	30	5	5
Sterneckiges Zwölfflach	12	12	30	5	5

Bei den paarweise zusammengestellten Körpern sind die

F, E, K, n, ν

des einen Körpers bezw. gleich den

E, F, K, ν, n

des anderen Körpers. Diese Eigenschaft nennt man die Reciprocität. Sie ergiebt sich unmittelbar aus der

Definition der reciproken Körper. Beschreibt man um ein regelmässiges Vielflach V eine Kugel und nennt zu einer Ecke des Vielflachs diejenige Ebene reciprok, welche in dieser Ecke die Kugel berührt zu einer Kante des V, welche zwei Ecken verbindet, die Schnittlinie der beiden diesen Ecken reciproken Ebenen, und zu einer Seite des V, deren Ecken auf einem Kreis liegen, den gemeinsamen Punkt der Ebenen, welche diesen Ecken reciprok sind, so nennt man dem Vielflach V dasjenige V′ reciprok, dessen Seiten, Kanten, Ecken den Ecken, Kanten, Seiten des V reciprok sind.

1) Diese Tabelle ist entnommen aus: Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig 1884. 1. Band. S. 142.

Daraus folgt, dass die Anzahl der Flächen und Ecken des einen Vielflachs bezüglich der Anzahl der Ecken und Flächen des anderen gleich ist und dass die Anzahl der Kanten bei beiden übereinstimmt.

Da man nun durch die Ecken einer idealen Krystallform im allgemeinen keine Kugel beschreiben kann, da ja nicht immer alle Ecken gleichweit vom Mittelpunkt entfernt sind, so muss diese Definition in ihrer Anwendung auf die Krystallographie umgeformt werden und zwar so, dass sich obige Definition als spezieller Fall daraus ergiebt.

Ebenso wie dem auf der Kugel liegenden Punkte die Tangentialebene entsprach, lassen wir jetzt einem in Bezug auf die Kugel beliebig gelegenen Punkte die Polarebene entsprechen, die Zuordnung der Tangentialebene zum Kugelpunkt ist in diesem erweiterten Gesetz der Zuordnung inbegriffen. Es ergiebt sich hieraus zunächst die folgende

§ 2.

Erweiterung der Definition der reciproken Körper für das reguläre System.

Man beschreibe um den Mittelpunkt der idealen Krystallform V eine Kugel K von beliebigem, aber passend gewähltem Radius, alsdann konstruiere man zu jedem Eckpunkt die Polarebene[1]), dadurch erhält man einen neuen Körper V′, den wir reciprok zu V in Bezug auf die Kugel K nennen.

Jeder Ecke E von V entspricht eine Ebene F′ von V′. Liegen n Ecken von V: $E_1, E_2, \ldots E_n$ auf einer Ebene F, so schneiden sich alle zu $E_1, E_2, \ldots E_n$ polaren Ebenen $F_1', F_2', \ldots F_n'$ in einem Punkt, nämlich der Ecke E′, welche der Pol der Ebene F ist. Gehen m Ebenen: $F_1, F_2, \ldots F_m$ von V durch eine Ecke E, so liegen die entsprechenden Pole $E_1', E_2', \ldots E_n'$ in einer Ebene F′, nämlich der Polarebene zu E.

Hieraus folgt, dass jeder n-zähligen Ecke von V eine n-zählige Fläche von V′ entspricht, jeder m-zähligen Fläche von V wieder eine m-zählige Ecke von V′. Jeder Kante von V, welche eine p- und eine q-zählige Ecke verbindet und die Grenze bildet einer r- und einer s-zähligen Fläche, entspricht bei V′ eine Kante, in welcher eine p- und eine q-zählige Fläche sich schneiden und welche eine r- und eine s-zählige Ecke verbindet. Die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen des Körpers V ist bezüglich gleich der Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken des reciproken Körpers V′.

Der durch die neue Definition erhaltene reciproke Körper zeigt also bezüglich V die gleichen Beziehungen, welche durch die erst an-

1) Die Polarebene zu einem Punkt als Pol in Bezug auf eine Kugel ist der Ort der vierten harmonischen Punkte, die man auf den durch den gegebenen Punkt gehenden Strahlen zu den jedesmaligen Schnittpunkten mit der Kugel und zu jenem Pol konstruieren kann.

geführte Definition bei den regelmässigen Körpern der Geometrie gewonnen wurden.

Wenden wir ferner die erweiterte Definition auf die Platonischen Körper an, indem wir die Kugel durch die Ecken legen, so erhalten wir den gleichen Körper V′ wie durch die erstgenannte Definition. Es ist ja die Tangentialebene in dem auf die Kugel fallenden Eckpunkt, nichts anderes als die Polarebene zu jener Ecke in Bezug auf die Kugel.

Bildet man nach der im vorhergehenden Paragraphen genannten Definition zu V′ wieder den reciproken Körper, so erhält man einen dem V ähnlichen Körper V*, welcher aber keineswegs kongruent mit V ist, und da es ja auf die absolute Grösse nicht ankommt, so mag wohl bei den platonischen Körpern diese sehr anschauliche Definition einer solchen vorgezogen werden, bei welcher V* kongruent mit V wird.

Bei unserer erweiterten Definition wird, wenn V′ reciprok zu V in Bezug auf eine bestimmte Kugel ist, der reciproke Körper zu V′ in Bezug auf die gleiche Kugel wieder V.

§ 3.

Zu einer in axionometrischer Projektion gegebenen Krystallform den reciproken Körper in gleicher Projektion zu verzeichnen.

Hilfssatz: Bezeichnen wir den Abstand einer Ecke E vom Mittelpunkt des Krystalls mit C_E, die Centraldistanz der zugehörigen Polarebene F′ mit $C_{F'}$, den Radius der Kugel, auf welche die Polarität bezogen ist, mit R, so findet die Beziehung statt:

$$C_E \cdot C_{F'} = R^2.$$

Diese Beziehung gilt für $C_E > R$, für $C_E < R$, ebenso auch bei Vertauschung der Striche:

$$C_{E'} \cdot C_F = R^2$$

Für $C_E = R$ oder $C_F = R$ wird bezüglich $C_{F'} = R$, $C_{E'} = R$.

Die obige Gleichung ermöglicht verhältnismässig leicht zu einer in axionometrischer Projektion gegebenen Krystallform des regulären Systems den reciproken Körper in der gleichen Projektion zu verzeichnen. Der Gang, welcher dieser Konstruktion zu Grunde liegt, besteht darin, dass man zuerst auf jede Fläche eine Normale fällt, hierdurch erhält man C_F und findet dann die Länge der auf der Normalen abzutragenden Strecke $C_{E'}$ durch die obige Relation. Die richtige Verbindung der E′ ergiebt die reciproke Form. Die Arbeit bei der Konstruktion wird dadurch erheblich vermindert, dass man, sobald für eine Krystallfläche von V die Koordinaten der entsprechenden Ecke E′ von V′ gefunden sind, durch blosses Vertauschen der Koordinaten die anderen gleichartigen Ecken findet.

Beispiel: Zu dem Achtundvierzigflächner $3O\frac{3}{2}$ (321) den reciproken Körper in axionometrischer Projektion zu verzeichnen. Um den Fusspunkt der Normalen auf

die Fläche $(a : \frac{3}{2} b : 3 c)$*) zu erhalten, klappen wir das von a, b und der Spur AB der Fläche $(a : \frac{3}{2} b : 3 c)$ auf der Ebene ab gebildete Dreieck um die Axe b in die Zeichenebene um, indem wir alle Masse nach dem Massstab der b zeichnen. (Vgl. Tafel I Fig. a). Eine Normale vom Mittelpunkt auf die Spur gefällt liefert den Punkt S'. Eine Parallele zu A'A durch S' gelegt schneidet die Spur AB in S. Auf CS muss jetzt der Fusspunkt der Normalen auf die Fläche gelegen sein. Wir klappen deswegen die Ebene OSC in die Zeichenebene um OC um. Auf einer Senkrechten zu OC in O errichtet muss die Länge OS' jedoch im Massstab der C abgetragen werden, was mit dem Strahlenmassstab (vergl. Fig. b und die Erklärung weiter unten) leicht zu bewerkstelligen ist. Wir erhalten dadurch den Punkt S''. Die Normale von O auf CS'' schneidet diese Gerade in T'' und eine Parallele zu S''S durch T'' gelegt, liefert auf CS den Schnittpunkt T. Dieser Punkt ist der Fusspunkt der Normalen, seine Verbindungsgerade mit O die Normale selbst. Auf OT muss jetzt, um den Eckpunkt zu erhalten, eine Strecke von O aus aufgetragen werden, deren wahre Länge $C_{E'} = \frac{R^2}{C_F}$, welche Länge bei gegebenem R leicht durch Konstruktion ermittelt werden kann. In unserem Fall nehmen wir am besten $R = C_F$ an, es wird dann $C_{E'} = C_F$, d. h. die Eckpunkte fallen mit den Fusspunkten der Normalen zusammen. Der reciproke Körper ist dem ursprünglichen bei dieser Annahme eingeschrieben.

Wir brauchen jetzt nur noch die Koordinaten von T zu ermitteln, um dann durch Vertauschung der Koordinaten alle 48 Ecken zu finden.

Eine Parallele durch T zu c schneidet OS in U (Fig. c) und es ist UT die z-Koordinate von T, die x- und y-Koordinate wird durch eine Parallele zu a und b durch U gefunden. Die drei auf diese Weise ermittelten Koordinaten sind aber in drei verschiedenen Massstäben ausgedrückt: x in dem Massstab der a, y in dem der b und z in dem der c. Bei der Koordinatenvertauschung brauchen wir aber jede dieser drei Längen in allen drei Massstäben, was wir leicht durch den Strahlenmassstab erhalten können.

Die Anfertigung und Anwendung des Strahlenmassstabes geschieht auf folgende Weise (Fig. d): Auf zwei Parallelen werden die durch das Axenkreuz gefundenen Längen a (= A_oA) und c (= C_oC) aufgetragen und eine Parallele wird nun so zwischengeschaltet dass die Verbindungsgeraden der Endpunkte der a und c (A_oC_o, AC) auf ihr gerade die Länge der Axe b (= B_oB) abschneidet. Trägt man nun von C_o gegen C hin die Strecke z ab, verbindet den Endpunkt mit O, so werden auf B_oB und auf A_oA Strecken abgeschnitten, welche die gleiche räumliche Länge ausdrücken, jedoch im Massstab der b bez. der a. In gleicher Weise wird y von B_o gegen B und x von A_o gegen A abgetragen und jeweils die Endpunkte mit O verbunden. Hierdurch sind neun Strecken entstanden, welche die drei Koordinaten in den drei Axenmassstäben ausdrücken.

Durch Auftragen der Koordinaten in entsprechender Combination erhalten wir die verschiedenen Punkte T, deren Verbindung den reciproken Körper ergiebt. Die Kontrolle und Verbesserung der Kantenrichtungen ist hier sehr leicht, da durch die Endpunkte des Axenkreuzes alle vorkommenden Richtungen bestimmt werden.

Anstatt die Koordinaten zu vertauschen hätten wir, sobald eine Ecke gefunden, die übrigen auf folgende Weise ermitteln können. Verbinden wir T, das ja auf einer Fläche des Achtundvierzigflächners liegt, mit einer Ecke A (Fig. e) desselben, so wird die gegenüberliegende Seite MN in einem Punkt W geschnitten. Die Lage des Punktes T ist nun bestimmt, wenn wir das Teilungsverhältnis angeben, in dem W die Seite MN,

---

*) Zur Unterscheidung der drei Axen sind hier die Bezeichnungen a, b, c gebraucht, welche also keine verschiedenen Längen ausdrücken, sondern nur die Richtung bezeichnen sollen, nämlich: a von hinten nach vorn, b von links nach rechts und c von unten nach oben.

sowie dasjenige, in dem T die Strecke AW teilt. Wollen wir z. B. im Dreieck M'NA' das zugehörige T' finden, so teilen wir M'N derart dass:

$$MN : M'N = MW : M'W' \text{ (S. Fig. e links unten),}$$

verbinden darauf W' mit A' und teilen A'W' durch T', so dass:

$$AW : A'W' = AT : A'T' \text{ (S. Fig. e rechts unten).}$$

Von den beiden Parallelen, welche die Konstruktion der Gleichung erfordert, braucht natürlich die eine gar nicht gezogen zu werden, es wird nur nach ihr angelegt; von der zweiten ist nur ein ganz kleiner Strich erforderlich. Es kann deswegen die gleiche Figur für alle in Betracht kommenden Teilungen verwendet werden. Wird eine Gerade etwa zu sehr verstochen, so dass leicht eine Verwechslung der Punkte entstehen könnte, so braucht man nur von M bezüglich A eine weitere Gerade unter wenig verschiedenem Winkel zu ziehen. Die Konstruktion der Punkte T ist genauer als die Vertauschung der Koordinaten und die reciproke Form befindet sich zur ursprünglichen in genau der richtigen Lage auch dann, wenn eine Fläche des ursprünglichen Körpers in der Projektion sehr schmal wird, während in diesem Fall bei der Vertauschung der Koordinaten T durch kleine Ungenauigkeit leicht ausserhalb der Fläche fallen könnte. Liegt die Ecke des reciproken Körpers nicht auf der Fläche des ursprünglichen, so überträgt man zuerst mit Hilfe der Teilungsverhältnisse die Fusspunkte der Flächennormalen, wie in diesem Beispiel geschehen, und teilt dann erst jede Flächennormale nach der Gleichung

$$C_{E'} = \frac{R^2}{C_F}$$

um die Eckpunkte zu finden.

§ 4.

Wenn ein Körper des regulären Systems gegeben ist, den reciproken Körper durch Rechnung zu finden.

Es kann hier auf zweierlei Weise vorgegangen werden: Entweder kann man zu den Ecken des gegebenen Körpers, deren Koordinaten zu berechnen sind, die Polarebenen suchen, oder man sucht zu den Flächen des gegebenen Körpers die Pole, welche ja die Ecken des reciproken Körpers sind und berechnet hieraus die Parameter der durch die Ecken bestimmten Flächen.

Diese Aufgabe zerfällt demnach bei Anwendung einer jeden der beiden Methoden in zwei verschiedene Fundamentalaufgaben, welche hier nach einander besprochen und an einem Beispiel erläutert werden sollen.

1. Bezeichnungen, welche im folgenden gebraucht werden.

Bevor wir zur Aufstellung der Formeln gehen, ist es zweckmässig, die im folgenden konsequent durchgeführte Bezeichnungsweise zusammenzustellen.

Es werden bezeichnet die

Axenlängen mit a, b, c (a, a, c; a, a, a), die

Koordinaten parallel den Axen a, b, c mit x, y, z; auch werden gelegentlich die Axen a, b und c selbst als x—, y—und z— Axen angesprochen. Ferner seien bezeichnet die

Ableitungszahlen mit m, n, p, die

Indices mit h, k, l und im hexagonalen System mit h, k, l, i, die

Axenabschnitte mit r, s, t (r, s, t, u im hexagonalen System) so dass das Parameterverhältnis ausgedrückt werden kann (z. B. im rhomb. System) durch:

$$r : s : t = ma : nb : pc = \frac{a}{h} : \frac{b}{k} : \frac{c}{l}.$$

Als Abstandszahl wollen wir eine solche mit $\varkappa$ zu bezeichnende Zahl verstehen, die sich im triklinen, monoklinen, rhombischen System aus einer der drei Gleichungen bestimmt

$$r = \frac{a}{h}\varkappa;\ s = \frac{b}{k}\varkappa;\ t = \frac{c}{l}\varkappa,$$

in welchen im quadratischen System $b = a$, im regulären $b = c = a$ zu setzen ist. Im hexagonalen System haben wir für $\varkappa$ vier Gleichungen:

$$r = \frac{a}{h}\varkappa;\ s = \frac{a}{k}\varkappa;\ t = \frac{a}{l}\varkappa;\ u = \frac{c}{i}\varkappa.$$

Wir haben hierdurch eine Darstellung eines jeden Axenabschnittes mit Hilfe von drei Grössen gewonnen, von welchen die Grösse a bezüglich b, c von der Substanz des Krystalls, h, bezüglich k, l, (i), von dem Symbol der Fläche und das den drei (vier) Axenabschnitten gemeinsame $\varkappa$ von der Centraldistanz der betreffenden Form abhängt. Das Getrennthalten dieser drei Bestandteile ist für die Vereinfachung der Rechnung von Vorteil.

Im regulären System, mit welchem sich dieser Paragraph befassen soll, wollen wir die Axenlänge a zur Längeneinheit wählen. Es werden dann die Axenabschnitte gleich $\frac{\varkappa}{h}, \frac{\varkappa}{k}, \frac{\varkappa}{l}$.

2. Vorbemerkungen aus der analytischen Geometrie.

Alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten x, y, z die lineare Gleichung

$$dx + ey + fz = g$$

erfüllen, liegen auf ein und derselben Ebene.[1])

Der Schnittpunkt der Ebene mit der x-Axe hat die Koordinaten $y = 0; z = 0$, woraus sich dann durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung ergiebt

$$x = \frac{g}{d}.$$

In gleicher Weise erhalten wir für die Schnittpunkte mit der y- bezüglich z-Axe die Koordinaten

$$x = z = 0,\ y = \frac{g}{e} \text{ bezügl. } x = y = 0,\ z = \frac{g}{f}.$$

Die Ebene hat also die Axenabschnitte

$$\frac{g}{d}, \frac{g}{e}, \frac{g}{f}.$$

1) Der Beweis kann an dieser Stelle nicht erbracht werden, doch ist die Erwähnung aus den in der Einleitung genannten Gründen wohl nicht erlässlich.

Es folgt hieraus, dass wenn man dem Absolutglied durch Division beider Seiten den Wert 1 giebt, die Koëfficienten von x, y, z die reciproken Werte der Axenabschnitte darstellen, so dass die Gleichung lautet:

$$\frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} = 1,$$

wo r, s, t die oben festgestellte Bedeutung haben.

Nimmt man im regulären System die Axenlänge a als Längeneinheit an und hat man durch Multiplikation oder Division bewirkt, dass d, e, f ganze Zahlen sind und keinen gemeinsamen Teiler besitzen, dann sind d, e, f die Indices der durch die Gleichung dargestellten Ebene und g entspricht der mit $\varkappa$ bezeichneten Abstandszahl, es ist also dann

$$d = h;\ e = k;\ f = l;\ g = \varkappa.$$

Die Gleichung lautet somit:

$$h\,x + k\,y + l\,z = \varkappa$$

Die Abschnitte auf den drei Axen sind $\frac{\varkappa}{h}, \frac{\varkappa}{k}, \frac{\varkappa}{l}$.

Die so beschaffene Gleichung wollen wir die Indexform der Ebene nennen. Sie liefert die Abschnitte der Ebene auf den drei Axen in der Form

$$\frac{\varkappa}{h}, \frac{\varkappa}{k}, \frac{\varkappa}{l}$$

Sind umgekehrt die Indices h, k, l einer Ebene gegeben sowie die Länge des Abschnitts der Ebene auf einer der drei Axen, etwa r auf der a-Axe (oder s auf der b-Axe, oder t auf der c-Axe), so erhält man im regulären System, wenn die Axenlänge als Einheit angenommen wird, die Gleichung der Ebene:

$$h\,x + k\,y + l\,z = \varkappa$$

wo $\varkappa$ bestimmt wird aus der Relation $\frac{\varkappa}{h} = r$ (oder $\frac{\varkappa}{k} = s$, oder $\frac{\varkappa}{l} = t$).

Verschiebt man eine solche Ebene parallel mit sich selbst, so ändert sich nur $\varkappa$, die linke Seite bleibt unverändert.

Sind die drei Axenabschnitte r, s, t der Ebene gegeben, so lautet die Gleichung

$$\frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} = 1.$$

Im folgenden Teil dieses Paragraphen, der sich auf das reguläre System beschränkt, wird stets $a = 1$ angenommen und die Indexform der Gleichung vorausgesetzt werden.

3. Die Koordinaten einer Ecke zu berechnen, wenn die Indices und Abstandszahlen von drei in der Ecke zusammenstossenden Flächen gegeben sind. (Fundamentalaufgabe 1.)

Es seien die Indices der drei Ebenen h, k, l; h′, k′, l′; h″, k″, l″ und die Abstandszahlen bezüglich gleich $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, so sind die drei Gleichungen der Ebenen:

$$\begin{aligned} h\ x + k\ y + l\ z &= \varkappa \\ h'\ x + k'\ y + l'\ z &= \varkappa' \\ h''\ x + k''\ y + l''\ z &= \varkappa'' \end{aligned}$$

Da der Schnittpunkt jeder der drei Ebenen angehört, so müssen seine Koordinaten auch jede der drei Gleichungen erfüllen und ergeben sich demnach als die Auflösung der drei Gleichungen. Diese Auflösung kann nach jeder beliebigen Methode erfolgen, wird aber am besten mit Hilfe von Determinanten[1]) bewerkstelligt.

Bezeichnen wir die aus den Koëfficienten von x, y, z gebildete Determinante mit N

$$\begin{vmatrix} h & k & l \\ h' & k' & l' \\ h'' & k'' & l'' \end{vmatrix} = N;$$

sowie diejenigen Determinanten, welche man erhält, wenn man statt den Koëfficienten von x den jedesmaligen Wert der rechten Seite der Gleichung (hier also $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$,) setzt mit Z_x und die bezügl. der Koëfficienten von y und z in ähnlicher Weise gebildete Determinante mit Z_y und Z_z:

$$\begin{vmatrix} \varkappa & k & l \\ \varkappa' & k' & l' \\ \varkappa'' & k'' & l'' \end{vmatrix} = Z_x; \quad \begin{vmatrix} h & \varkappa & l \\ h' & \varkappa' & l' \\ h'' & \varkappa'' & l'' \end{vmatrix} = Z_y; \quad \begin{vmatrix} h & k & \varkappa \\ h' & k' & \varkappa' \\ h'' & k'' & \varkappa'' \end{vmatrix} = Z_z$$

so wird

$$x = \frac{Z_x}{N}; \quad y = \frac{Z_y}{N}; \quad z = \frac{Z_z}{N}.$$

Zahlenbeispiel. Es sollen vom Achtundvierzigflächner $3O_2^3$ (321), $\varkappa = 3$ die Koordinaten der Eckpunkte gefunden werden.

Die auf den Axen liegenden Ecken sind sogleich gegeben. Sie haben die Koordinaten 1, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0 u. s. w.

---

1) Der Wert der Determinante $\begin{vmatrix} h & k & l \\ h' & k' & l' \\ h'' & k'' & l'' \end{vmatrix}$ wird gefunden,

wenn man die zwei ersten Zeilen derselben unten nochmals zufügt und dann aus der von links oben nach rechts unten gehenden Diagonalreihe der ursprünglichen Determinante sowie aus den beiden ihr parallel gehenden Reihen jedesmal ein Produkt bildet, diese drei Produkte addiert und sodann mit den drei von links unten nach rechts oben gehenden Reihen in gleicher Weise verfährt und ihre Summe von der ersten abzieht:

$$\begin{array}{lll} & & h'' \ k' \ l \\ \begin{vmatrix} h & k & l \\ h' & k' & l' \\ h'' & k'' & l'' \end{vmatrix} & & h \ k'' \ l' \\ & & h' \ k \ l'' \\ h \ k \ l & & h \ k' \ l'' \\ h' \ k' \ l' & & h' \ k'' \ l \\ & & h'' \ k \ l' \end{array}$$

$$\text{Determinante} = h\,k'\,l'' + h'\,k''\,l + h''\,k\,l' - (h''\,k'\,l + h\,k''\,l' + h'\,k\,l'')$$

Die Koordinaten der auf der Oktaëdernormale liegenden Ecke sind aus Gründen der Symmetrie einander gleich, für sie ist $x = y = z$ und es genügt deswegen die Berechnung von x.

Drei der Ebenen, welche die Ecke im positiven Quadranten bestimmen, haben die Indices 3 2 1, 2 1 3, 1 3 2 und jede die Abstandszahl 3. Die drei Gleichungen sind folglich:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ 2x + y + 3z &= 3 \\ x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

$$N = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -18;\ ^{1}) \quad Z_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9\ ^{2})$$

$$x = \frac{Z_x}{N} = \frac{1}{2}, \text{ deshalb auch } y = z = \frac{1}{2}.$$

Die Koordinaten der entsprechenden Ecken in den anderen Oktanten unterscheiden sich nur durch ihr Vorzeichen.

Für die dritte Art von Ecken, welche auf der Rhombendodekaëdernormalen liegen, erhalten wir $x = 0;\ y = z = \frac{3}{5}$ u. s. w. Es können diese Koordinaten kürzer auf die § 18 angegebene Weise gefunden werden.

4. Zu einem Pol, dessen Koordinaten gegeben sind, die Polarebene zu suchen. (Fundamentalaufgabe 2.)

Verbindet man den Pol, dessen Kordinaten x_1, y_1, z_1 seien, mit dem Mittelpunkt des Koordinatensystems, nennt die Länge dieser Verbindungsstrecke q' und errichtet im Pol die Normalebene E′ auf q', welche die drei Axen in den Abständen r', s' t' schneidet, so finden folgende Relationen statt. Es ist $r' = \frac{q'^2}{x_1}$, wie sich leicht aus dem in der Ebene aq' befindlichen Dreieck ergiebt; ebenso ist $s' = \frac{q'^2}{y_1}$ und $t' = \frac{q'^2}{z_1}$. Die Gleichung dieser Normalebene E′ lautet also

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 = q'^2; \quad (1)$$

wobei x_1, y_1, z_1, die Koordinaten des Poles sind. Liegt der Pol auf der Kugel mit dem Radius R, auf welche die Reciprocität bezogen sein soll, so ist die Ebene zugleich auch die Polarebene.

Liegt der Pol aber nicht auf dieser Kugel, so ist seine Polarebene E parallel jener Ebene E′. Die Centraldistanz von E sei q und ihre Gleichung laute:

$$\frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} = 1; \quad (2)$$

Es verhält sich dann $r' : r = s' : s = t' : t = q' : q$

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 27 \\ 8 \end{matrix} \Big\} = 36$

$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{matrix} \Big\} = 18$

; $N = 18 - 36 = -18$.

2) An die Stelle des Koëfficienten von x ist hier 3, der Wert der rechten Seite gesetzt.

Nun ist aber nach § 3 $q' q = R^2$, folglich wird $r = r' \frac{R^2}{q'^2}$, $s = s' \frac{R^2}{q'^2}$, $t = t' \frac{R^2}{q'^2}$ oder mit Benützung der oben für r', s', t' gefundenen Werte

$$r = \frac{R^2}{x_1}, \quad s = \frac{R^2}{y_1}, \quad t = \frac{R^2}{z_1}; \quad (3)$$

Die Einsetzung dieser Werte in die Gleichung (2) ergiebt

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 = R^2; \quad (4)$$

als Gleichung der Polarebene E zum Pol P mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 bezogen auf die Kugel mit dem Radius R.

Man sieht auch sogleich, dass für $q' = R$ die Gleichung (1) in (4) übergeht.

Zahlenbeispiel, (Fortsetzung). Die Kugel, auf welche der reciproke Körper bezogen sei, möge den Radius 1 besitzen. Den erst angeführten Ecken entspricht dann ein Würfel mit der Centraldistanz 1. Die Ecke mit den Koordinaten $x_1 = y_1 = z_1 = \frac{1}{2}$ liefert als Gleichung ihrer Polarebene

$$x \frac{1}{2} + y \frac{1}{2} + z \cdot \frac{1}{2} = 1^2$$

oder auf die Indexform gebracht: $x + y + z = 2$. Hieraus folgen die Indices 1 1 1 und für die ganze Krystallform das Symbol (1 1 1) und die Abstandszahl $\varkappa$. Der reciproke Körper dieser Ecken ist also ein Oktaëder, das die drei Axen im Abstand 2 schneidet.

Die Ecke $0, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ liefert die Gleichung

$$0 \cdot x + \frac{3}{5} y + \frac{3}{5} z = 1;$$

oder auf die Indexform gebracht

$$0 \cdot x + y + z = \frac{5}{3}$$

hieraus folgt das Symbol (0 1 1) und die Abstandszahl $\varkappa = \frac{5}{3}$; wir erhalten also ein Rhombendodekaëder, das zwei Axen im Abstand $\frac{5}{3}$ schneidet.

5. Zu einer Polarebene den Pol zu suchen. (Fundamentalaufgabe 3).

Wir haben hier die Umkehrung der vorhergehenden Aufgabe. Bezeichnen wir mit r, s, t die Axenabschnitte der Polarebene, so geben uns die Gleichungen (3) der vorhergehenden Aufgabe, wenn wir sie nach x_1, y_1, z_1 auflösen, die Koordinaten des gesuchten Poles:

$$x_1 = \frac{R^2}{r}, \quad y_1 = \frac{R^2}{s}; \quad z_1 = \frac{R^2}{t}.$$

Führen wir statt r, s, t die Indices und die Abstandszahl ein, so ergiebt sich:

$$x_1 = h \frac{R^2}{\varkappa}, \quad y_1 = k \frac{R^2}{\varkappa}, \quad z_1 = l \frac{R^2}{\varkappa}.$$

Zahlenbeispiel. (Zweite Methode.) Die Koordinaten des Poles der Fläche mit den Indices 3 2 1 und der Abstandszahl 3 zu finden bezüglich der Kugel mit dem Radius 1.

$$R = 1, \; h = 3, \; k = 2, \; l = 1; \; \varkappa = 3$$

$$x_1 = 1; \quad y_1 = \frac{2}{3}; \quad z_1 = \frac{1}{3}$$

6. Indices und Abstandszahl einer Ebene zu berechnen, welche durch drei Punkte mit gegebenen Koordinaten geht. (Fundamentalaufgabe 4).

Die Koordinaten der drei Punkte seien x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 und x_3, y_3, z_3. Die Gleichung der gewünschten Ebene

$$h\,x + k\,y + l\,z = \varkappa$$

enthält die drei unbekannten Indices h, k, l und die Abstandszahl $\varkappa$. Die Koordinaten eines jeden der drei Punkte in die Gleichung eingesetzt, müssen jedesmal der Gleichung genügen. Wir erhalten hieraus die drei Gleichungen

$$h\,x_1 + k\,y_1 + l\,z_1 = \varkappa$$
$$h\,x_2 + k\,y_2 + l\,z_2 = \varkappa$$
$$h\,x_3 + k\,y_2 + l\,z_3 = \varkappa,$$

mittelst welcher wir die Indices h, k, l durch $\varkappa$ ausdrücken können. Für $\varkappa$ ist alsdann eine positive Zahl so zu wählen, dass h, k, l ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler werden.

Zahlenbeispiel, (Fortsetzung). Die Indices der Ebene, welche durch die Ecken $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1$; $\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}$ geht, werden mit Hilfe der folgenden drei Gleichungen durch die Abstandszahl $\varkappa$ ausgedrückt

$$h + \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}l = \varkappa$$
$$\frac{2}{3}h + \frac{1}{3}k + l = \varkappa$$
$$\frac{1}{3}h + k + \frac{2}{3}l = \varkappa.$$

Die Auflösung ergiebt

$$h = k = l = \frac{1}{2}\varkappa$$

und $\varkappa$ muss jetzt gleich 2 gesetzt werden, so dass

$$h = k = l = 1; \quad \varkappa = 2.$$

Für die durch die Ecken $1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1$ und $1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ gehende Ebene findet man auf gleiche Weise

$$h = l = 1, \; k = 0, \; \varkappa = \frac{5}{3}.$$

Eine Fläche der dritten Art wird z. B. bestimmt durch die Ecken $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$; $1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$; $1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$. Diese Ebene geht wie direkt zu sehen, der y- und z-Axe parallel, gehört also dem Würfel (100) an und hat die Abstandszahl 1.

Um die auf zwei verschiedene Methoden übereinstimmend gewonnenen Resultate zusammen zu fassen, sei wiederholt: der reciproke Körper des Achtundvierzigflächners $3O_2^3$ (321) bezogen auf eine Kugel, deren Radius gleich der als Einheit angenommenen Axenlänge sei, ist eine Kombination von Würfel (100), Oktaëder (111), und Rhombendodekaëder (110), von welchen jede einzelne Form eine ganz bestimmte Centraldistanz besitzt, die durch die entsprechenden Abstandszahlen 1, 2 und $\frac{5}{3}$ bestimmt wird. Der Würfel liefert demnach die Axenabschnitte 1, ∞, ∞, das Oktaëder und das Rhombendodekaëder beziehungsweise die Abschnitte 2, 2, 2 und $\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \infty$.

§ 5.

Geometrisches Ableitungsprincip der verschiedenen Systeme aus dem regulären.

Die für das reguläre System aufgestellte Definition der reciproken Körper, sowie die vier zur Berechnung der reciproken Formen angeführten Grundaufgaben, können mit grosser Leichtigkeit und ohne weitergehende mathematische Kenntnisse zu erfordern auf die fünf anderen Systeme übertragen werden, wenn man diese auf folgende Weise sich aus dem regulären System rein geometrisch ableitet.

Die regulären Krystalle kann man sich in ein Punktsystem eingetragen denken, dessen einzelne Punkte die Eckpunkte von neben und übereinander gelegten Würfelchen bilden. Geht man von einem dieser Punkte aus um die Kantenlänge des Würfels nach links oder rechts, vorn oder hinten, oben oder unten, so trifft man wieder auf einen Punkt des Systems.

Bleibt nun der Abstand in der Richtung der Axe a und b der gleiche, vergrössert sich aber der Abstand der Punkte in der Richtung c im Verhältnis $\frac{c}{a}$, so erhalten wir das Punktsystem (Raumgitter) für das quadratische System. Erfolgt ausser der Längenänderung in der Richtung c auch eine solche in der Richtung b im Verhältnis von $\frac{b}{a}$, so entsteht das Punktsystem des rhombischen Systems.

Jedem Punkt des regulären Punktsystems entspricht jetzt ein gewisser Punkt des quadratischen und auch ein gewisser Punkt des rhombischen Systems. Hatte der Punkt des regulären Systems die Koordinaten x, y, z, so sind die Koordinaten des Punktes im quadratischen System

$$x_q = x;\ y_q = y;\ z_q = \frac{c}{a} z$$

und die im rhombischen System

$$x_r = x;\ y_r = \frac{b}{a} y;\ z_r = \frac{c}{a} z$$

Dem monoklinen (u. triklinen) System können wir auch ein Punktsystem zuerteilen, derart, dass jedem Punkt des regulären Systems ein Punkt des monoklinen (triklinen) Systems entspricht. Dem Punkt mit den Koordinaten x, y, z im regulären System entspricht im monoklinen (triklinen) System der Punkt mit den Koordinaten, $x_m = x;\ y_m = \frac{b}{a} y;\ z_m = \frac{c}{a} z$, welche auf die schiefwinkeligen Axen des monoklinen (triklinen) Systems bezogen sind.

§ 6.

Uebertragung der Definition der reciproken Körper auf alle dreiaxigen Systeme.

Ist im regulären Punktsystem eine Krystallform und ein ihr in Bezug auf eine Kugel reciproker Körper gegeben, so können wir die drei ent-

sprechenden Gebilde im quadratischen (rhombischen u. s. w.) System finden, indem wir zu jedem Punkt im regulären Punktsystem den entsprechenden im quadratischen (rhombischen u. s. w.) System suchen. Schneidet eine Ebene im regulären Punktsystem die Axen in den Abständen

$$\frac{\varkappa}{h}a,\ \frac{\varkappa}{k}a,\ \frac{\varkappa}{l}a$$

lautet ihre Gleichung also

$$\frac{h}{a}x+\frac{k}{a}y+\frac{l}{a}z=\varkappa^{1}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

so liegen die den Punkten der Ebene entsprechenden Punkte im quadratischen System wieder auf einer Ebene, deren Gleichung ist

$$\frac{h}{a}x+\frac{k}{a}y+\frac{l}{c}z=\varkappa \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Die Schnittpunkte mit der a- und b-Axe blieben nämlich die gleichen, die z-Koordinate des Schnittpunktes auf der c-Axe wurde aber gleich $\frac{a}{l}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{l}$. Legt man durch diese drei Punkte eine Ebene, so erhält man die Gleichung (2). Jedem Punkt, dessen Koordinaten x, y, z im regulären Punktsystem die Gleichung (1) befriedigen, entspricht ein Punkt mit den Koordinaten $x, y, \frac{c}{a}z$, welche der Gleichung (2) genügen.

In gleicher Weise entspricht der Ebene (1) im rhombischen System wie man auf dieselbe Weise findet, die Gleichung

$$\frac{h}{a}x+\frac{k}{b}y+\frac{l}{c}z=\varkappa \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)'.$$

(2)′ stellt auch die entsprechende Ebene im triklinen und monoklinen System dar, wenn man die Koordinaten auf die entsprechenden schiefwinkeligen Axen bezieht.

Der Kugel, auf welche die reciproken Körper im regulären System bezogen sind und welche den Radius R besitzen möge, entspricht im quadratischen System ein Ellipsoid mit den Halbaxen $R, R, \frac{c}{a}R$. Dies Ellipsoid ist ein Umdrehungsellipsoid, das man sich entstanden denken kann durch Umdrehung der Ellipse mit den Halbaxen $R, \frac{c}{a}R$ um die c-Axe.

Im rhombischen System entspricht der Kugel ein Ellipsoid mit den Halbaxen $R, \frac{b}{a}R, \frac{c}{a}R$.

Auch im monoklinen und triklinen System entspricht der Kugel wieder ein Ellipsoid, von welchem die Axen dieser Systeme drei konjugierte

---

1) Wegen der weiteren Ableitungen wurde hier a nicht gleich 1 gesetzt und auch nicht, wie es einfacher wäre, auf die rechte Seite gebracht.

Durchmesser mit den Längen, 2 R, $2\frac{b}{a}$ R, $2\frac{c}{a}$ R darstellen. Die Axen des Ellipsoids fallen im triklinen System mit keiner der krystallographischen Axen zusammen. Im monoklinen System ist nur die krystallographische Axe b ihrer Richtung nach eine Axe des Ellipsoides.

Die beiden Körper, welche aus zwei reciproken Körpern des regulären Punktsystems entstanden sind, nennen wir nun selbst wieder reciprok in Bezug auf das aus der Kugel entstandene Ellipsoid.

Auch ohne Vermittelung des Ellipsoides sind wir im stande nach dem Ableitungsprincip zu jedem Punkt die Polarebene und zu jeder Ebene den Pol zu finden, wie gleich noch näher gezeigt werden wird.

Es möge hier aber auch die Rolle, welche das Ellipsoid spielt, wenn auch nur mit angedeutetem Beweis, dargelegt werden.

Aus der Entstehung eines Punktsystems aus dem regulären folgt leicht, dass die Teilungsverhältnisse entsprechender Strecken durch entsprechende Punkte die gleichen bleiben. Hieraus ergiebt sich weiter, dass die Ebene E′, welche der Polarebene E im regulären Punktsystem und der Punkt P′, welcher dem Pol P entspricht, die von dem Ellipsoid abgeschnittene Strecke einer durch P′ gehenden Geraden harmonisch teilt. Hieraus folgt ferner wenn P′ ausserhalb des Ellipsoides liegt, dass die von P′ nach den Punkten der Schnittkurve der Ebene E′ mit dem Ellipsoid gezogenen Geraden einen Tangentenkegel des Ellipsoides bilden. Die Polarebene E′ ist parallel zu der Tangentialebene, welche wir durch den Endpunkt des durch P′ gehenden Halbmessers an das Ellipsoid ziehen können. Die Entfernung des Schnittpunktes dieses Halbmessers mit der Ebene E′ vom Mittelpunkt des Ellipsoides multipliziert mit der Centraldistanz von P′ ist gleich dem Quadrat dieses Halbmessers.

Aus diesen mit Pol und Polarebene des regulären Punkt-Systems so übereinstimmenden Beziehungen sehen wir, dass jedem Punkte P′ eine und nur eine Ebene E′ und umgekehrt jeder Ebene E′ ein Punkt P′ in Bezug auf ein Ellipsoid entspricht. Wir nennen deswegen auch hier P′ den Pol der Ebene E′ und umgekehrt E′ die Polarebene von P′.

Wir sind jetzt im stande die Definition der reciproken Körper auf die anderen Krystallsysteme mit drei Axen auszudehnen:

Man beschreibe um den Mittelpunkt der idealen Krystallform V ein Ellipsoid, welches im quadratischen und rhombischen System die drei Krystallaxen zu Axen, im monoklinen System die Krystallaxe b zur Axe und die zwei anderen zu konjugierten Durchmessern, im triklinen System endlich alle drei Krystallaxen zu konjugierten Durchmessern besitzt. Alsdann konstruiere man zu jedem Eckpunkte die Polarebene in Bezug auf das Ellipsoid, dadurch erhält man einen neuen Körper V′, den wir reciprok zu V in Bezug auf das Ellipsoid nennen.

Desgleichen können wir V′ auch erhalten, indem wir zu den Ebenen von V die Pole suchen und diese als Eckpunkte von V′ auffassen.

§ 7.

Konstruktion des reciproken Körpers in den übrigen dreiaxigen Systemen.

Man kann die Konstruktion des reciproken Körpers, wenn der ursprüngliche in Zeichnung gegeben ist, auf zwei ganz verschiedene Methoden durchführen.

Erste Methode.

Man verfahre analog dem im regulären System durchgeführten Beispiel § 3, nur dass man auf die Fläche keine Normale fällt, sondern den konjugierten Durchmesser zieht.

Will man zu einer Ebene den Pol suchen, so betrachte man zunächst nur die ab-Ebene. In dieser hat man die Schnittellipse des Ellipsoides und die eine Spur der Ebene des Krystalls. Zu der Richtung dieser Spur suche man den konjugierten Durchmesser (er entspricht der Normalen im regulären System). Jetzt lege man die durch den eben erhaltenen Durchmesser und die c-Axe gelegte Ebene in die Zeichen-Ebene um, konstruiere die Schnittellipse der Ebene mit dem Ellipsoid, sowie die Spur der Ebene des Krystalls und suche zu dieser Spur den konjugierten Durchmesser (es entspricht derselbe der Flächennormale des regulären Punktsystems). Es handelt sich jetzt nur noch um die Centraldistanz des Poles. Auch diese wird analog dem regulären Punktsystem gefunden, wobei aber der Radius R ersetzt wird durch die Länge des zum Pol gehörigen Ellipsenhalbmessers.

Im monoklinen System beginne man mit der ac-Ebene. Im triklinen System ist die Konstruktion nicht mehr so einfach auf diese Methode ausführbar.

Es ist nach Behandlung dieser Aufgabe leicht auch den umgekehrten Weg einzuschlagen und zu einem Pole die Polarebene zu konstruieren.

Zweite Methode.

Die zweite Methode besteht darin, dass man zu der gegebenen Krystallform I, bei welcher die Punktabstände in den drei Axenrichtungen drei verschiedene Werte besitzen, alle y-Koordinaten im Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkürzt, wodurch man einen Körper II erhält, bei dem nur die Punktabstände in der c-Richtung verschieden sind von denen in der a- und b-Richtung. Verkürzt man nun noch die z-Koordinaten im Verhältnis $\frac{c}{a}$, so erhält man einen in das reguläre Punktsystem eingeschriebenen Körper III, falls das ursprüngliche System rhombisch war, oder man kann jetzt, falls dasselbe monoklin oder triklin war, leicht aus dem erhaltenen Körper III einen solchen IV des regulären Punktsystems konstruieren, indem man die Koordinaten mit gleicher Länge nach drei aufeinander senkrechten Richtungen aufträgt. Zu dem Körper IV bez. III

konstruiere man, wie im regulären System angegeben, den reciproken Körper IV′ bezw. III′ und gehe dann den gleichen Weg von IV′ zu III′, von III′ zu II′ und von II′ zu I′ zurück.

Ist der ursprüngliche Körper noch nicht durch Zeichnung gegeben, soll aber zusammen mit dem reciproken gezeichnet werden, so konstruiert man gleich zu Anfang den entsprechenden Körper des regulären Punktsystems und den reciproken und geht dann erst zu dem gewünschten System über.

Bei der praktischen Ausführung der Zeichnung kann man sich natürlich die hier der Ausführlichkeit wegen angeführten Zwischenstufen ersparen und direkt vom gegebenen Körper zum regulären Punktsystem und von diesem wieder zum gewünschten übergehen.

§ 8.

Wenn die Indices und die Abstandszahl eines Körpers des quadratischen, rhombischen, monoklinen oder triklinen Systems gegeben sind, die entsprechenden Grössen des reciproken Körpers zu berechnen.

Man denke sich zu der Krystallform eines dieser Systeme den entsprechenden Körper, welcher also die gleichen Indices h k l und die gleiche Abstandszahl $\varkappa$ besitzt, in das reguläre Punktgitter eingezeichnet, konstruiere zu diesem Körper den reciproken und zu dem letzteren den entsprechenden Körper desjenigen Punktsystems, dem der ursprüngliche Körper angehörte, so erhalten wir ohne das Ellipsoid zu benötigen den reciproken Körper.

Diese Ueberlegung, welche zu der angeführten Konstruktion des reciproken Körpers geführt hat, dient auch dazu, die für das reguläre System aufgestellten Formeln ohne weiteres für alle Systeme verwendbar zu machen.

Man rechne nämlich, gleich welche der vier Fundamentalaufgaben vorliegt, nicht mit $\frac{\varkappa}{h}a$, $\frac{\varkappa}{k}b$, $\frac{\varkappa}{l}c$, sondern nur mit den Indices h, k, l, und der Abstandszahl $\varkappa$, im Schlussresultat multipliziere man dann das Ergebnis, soweit es sich auf die x-Axe bezieht (z. B. den Abschnitt auf der x-Axe oder die x-Koordinate) mit a, soweit es sich auf die y-Axe bezieht, mit b und soweit es sich auf die z-Axe bezieht, mit c. Trägt man diese Längen, wenn es Axenabschnitte sind, auf den Axen des Systems, um das es sich handelt, ab, oder bezieht man, wenn es sich um Koordinaten handelt, dieselben auf das betreffende System, so ist der erhaltene Punkt der gewünschte. Es ergiebt sich dies daraus, dass man die Rechnung eben an dem entsprechenden Körper im regulären Punktsystem ausführte und zu den hieraus gewonnenen Punkten wieder die entsprechenden in dem System, von dem man ausging, suchte.

Zahlenbeispiel. Zu der rhombischen Pyramide $_2P\bar{3}$ den reciproken Körper zu ermitteln in Bezug auf das Ellipsoid, dessen Axen gleich den Krystallaxen a, b, c sind.

Erste Methode. Im regulären Punktsystem entsprechen den Eckpunkten 1, 0, 0; 0, 3, 0; 0, 0, 2 die Ebenen: $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$, wie sich durch Einsetzen in die Formel (4) des § 4,4 sogleich ergiebt. Diesen Werten entspricht im rhombischen System $x_r = a$; $y_r = \frac{b}{3}$; $z_r = \frac{c}{2}$. Wie haben also als reciproken Körper eine Kombination von drei Pinakoiden mit den Centraldistanzen a, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{2}$.

Zweite Methode. Der Pol der Fläche mit den Axenabschnitten 1, 3, 2 (also den Indices 6 2 3 und der Abstandszahl 6) im regulären Punktsystem bezogen auf die Kugel mit dem Radius 1 hat die Koordinaten $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$. Die durch die Punkte $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; $1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$ gelegte Ebene gehört einem Pinakoid parallel b c an, dessen Centraldistanz gleich 1 ist. Ebenso findet man ein Pinakoid parallel a c mit der Centraldistanz $\frac{1}{3}$ und parallel a b mit der Centraldistanz $\frac{1}{2}$. Im rhombischen System entsprechen diesen Ebenen die Pinakoide mit den Centraldistanzen: a, $\frac{b}{3}$ und $\frac{c}{2}$.

§ 9.

Uebertragung der Definition des reciproken Körpers auf das hexagonale System.

Das hexagonale System können wir nicht wie die dreiaxigen Systeme auf das reguläre Punktsystem zurückführen. Wir können uns aber ein specielles hexagonales System als Ausgangspunkt für unsere Betrachtung wählen, nämlich dasjenige, bei welchem die Punkte in der Richtung der c-Axe den gleichen Abstand haben, wie in der Richtung der a-Axen. Um in diesem äquidistanten Punktsystem den regulären Körper zu suchen, muss man eine Kugel wählen, da diese die vier gleichen Axen auch in gleichen Abständen schneidet. Das gewöhnliche hexagonale Punktsystem steht nun zu diesem äquidistant-hexagonalen Punktsystem in der gleichen Beziehung, wie das quadratische zum regulären. Es folgt hieraus: Wir finden im hexagonalen System zu einer Krystallform die reciproke, indem wir zu jedem Eckpunkt die Polarebene bezüglich desjenigen Umdrehungsellipsoides bilden, dessen halbe Umdrehungsaxe die krystallographische c-Axe und dessen Radius für den Hauptkreisschnitt die a-Axe ist.

§ 10.

Wenn die Indices und die Abstandszahlen eines hexagonalen Körpers gegeben sind, die Indices und die Abstandszahlen des reciproken Körpers zu berechnen.

Die Aufgabe lässt sich auf die entsprechende des äquidistant hexagonalen Systems zurückführen, wenn wir statt des gegebenen Körpers den entsprechenden dieses Systems betrachten.

Die Schwierigkeit besteht jetzt nur noch darin, dass wir es hier mit zum Teil schiefwinkeligen Koordinaten zu thun haben. Wir können auf zweierlei Weise verfahren, entweder die schiefwinkeligen Koordinaten

in rechtwinkelige umwandeln, indem wir eine Zwischenaxe benutzen, oder wir können die Rechnung mit den schiefwinkeligen Axen durchführen unter Aufstellung der dazu nötigen Formeln.

Nur das letztgenannte Verfahren, welches rascher und eleganter zum Ziel führt, möge hier besprochen werden.

Bezeichnet man die sechs Halbstrahlen der Nebenaxen in der von Bravais vorgeschlagenen Weise abwechselnd als positiv und negativ und führt ein auf der gleichen Geraden liegendes Halbstrahlenpaar als x-Axe, ein anderes solches Paar als y-Axe ein, so bilden die positiven Richtungen der x- und y-Axen einen Winkel von 120°. Es kommen also von den drei Nebenaxen nur zwei beliebig gewählte zur Verwendung, so dass man die Rechnung z. B. mit den Indices k l i oder mit h l i oder endlich mit h k i durchführen kann, wobei h k l sich auf die Nebenaxen, i sich auf die Hauptaxe bezieht.

Der Schnittpunkt dreier Ebenen wird mit den schiefwinkeligen Koordinatenaxen ebenso berechnet wie mit den rechtwinkeligen (Fundamentalaufgabe 1) und auch die Gleichung einer durch drei Punkte bestimmten Ebene ergiebt sich genau wieder auf die oben angegebene Weise. (Fundamentalaufgabe 4).

Die Lösung der Fundamentalaufgabe 2, zu einem Punkt die Polarebene zu finden, erhält aber eine Aenderung, da die dort benutzten Gleichungen

$$r' = \frac{q'^2}{x_1}, \quad s' = \frac{q'^2}{y_1}$$

sich umwandeln in

$$r' = \frac{q'^2}{x_1 - \frac{1}{2}y_1}, \quad s' = \frac{q'^2}{y_1 - \frac{1}{2}x_1}.$$

Hieraus folgt dann die Gleichung der Polarebene für den Punkt x_1, y_1, z_1

$$x\,(x_1 - \frac{1}{2}\,y_1) + y\,(y_1 - \frac{1}{2}\,x_1) + z\,z_1 = R^2.$$

Zahlenbeispiel. (Fundamentalaufgabe 1). Die Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Schnittpunktes der Ebenen mit den Indices $2\,1\,\bar{3}$ 1. $\bar{3}\,2\,1$ 1, $1\,2\,\bar{3}\,\bar{1}$ und der Abstandszahl $\varkappa = 3$ ergeben sich je nach der Wahl der Nebenaxen aus einem der drei Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{lll} x_1 - 3\,y_1 + z_1 = 3 & 2\,x_1 - 3\,y_1 + z_1 = 3 & 2\,x_1 + y_1 + z_1 = 3 \\ 2\,x_1 + y_1 + z_1 = 3 \text{ od. aus} & -3\,x_1 + y_1 + z_1 = 3 \text{ od. aus} & -3\,x_1 + 2\,y_1 + z_1 = 3 \\ 2\,x_1 - 3\,y_1 - z_1 = 3 & x_1 - 3\,y_1 - z_1 = 3 & x_1 + 2\,y_1 - z_1 = 3; \end{array}$$

das letztere liefert

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad y_1 = \frac{5}{3}, \quad z_1 = \frac{2}{3}.$$

(Fundamentalaufgabe 2). Die Gleichung der zu der eben bestimmten Ecke gehörigen Polarebene lautet:

$$x\,(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}) + y\,(\frac{5}{3} - \frac{1}{6}) + \frac{2}{3}\,z = 1$$

$$-\frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2}\,y + \frac{2}{3}\,z = 1;$$

die Axenabschnitte der Polarebene sind also $r = -2a$, $s = \frac{2}{3}a$, $t = \frac{3}{2}c$.
Die Indices h, k und i sowie die Abstandszahl $\varkappa$ ergeben sich aus der Indexform

$$-3x + 9y + 4z = 6$$

und der Index l aus der Relation

$$h + k + l = 0.$$

h k l i sind bez. gleich $\bar{3}\ 9\ \bar{6}\ 4$; $\varkappa = 3$.

Leitet man auf die gleiche Weise, wie im rechtwinkeligen System die Formeln für die Koordinaten des Poles ausgedrückt durch die Indices der Polarebene, durch $\varkappa$ und durch R ab, so erhält man zuerst die Gleichungen

$$x_1 - \frac{1}{2}y_1 = h\frac{R^2}{\varkappa}$$

$$y_1 - \frac{1}{2}x_1 = k\frac{R^2}{\varkappa}$$

$$z_1 = i\frac{R^2}{\varkappa}$$

Hierbei gilt bezüglich der Indices das schon oben gesagte. Aus den beiden ersten Gleichungen ergeben sich x_1 und y_1, die dritte hat schon die gewünschte Form und wir erhalten

$$x_1 = (2h + k)\frac{2R^2}{3\varkappa}$$

$$y_1 = (2k + h)\frac{2R^2}{3\varkappa}.$$

$$z_1 = i\frac{R^2}{\varkappa}.$$

Zahlenbeispiel. (Fundamentalaufgabe 3). Durch Einsetzen in diese Formeln findet man zu den Ebenen mit den Indices $2\ 1\ \bar{3}\ 1$; $\bar{3}\ 2\ 1\ 1$; $1\ 2\ \bar{3}\ \bar{1}$ und den jedesmaligen Abstandszahlen 3 die Koordinaten der entsprechenden Pole:

$$\frac{10}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{3}; -\frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}; \frac{8}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{1}{3}.$$

(Fundamentalaufgabe 4). Die Indices der durch diese Pole gehenden Ebene werden mit Hilfe der folgenden Gleichungen durch $\varkappa$ ausgedrückt gefunden:

$$10h + 8k + 3i = 9\varkappa$$
$$-8h + 2k + 3i = 9\varkappa$$
$$8h + 10k - 3i = 9\varkappa$$

nämlich $h = -\frac{1}{2}\varkappa$; $k = \frac{3}{2}\varkappa$; $i = \frac{2}{3}\varkappa$ und $\varkappa$ wird nun so bestimmt, dass h, k, i ganze Zahlen (ohne gemeinsamen Teiler) werden: $h = -3$; $k = 9$; $i = 4$; $\varkappa = 6$; $l = -(h + k) = -6$, wie schon oben gefunden.

§ 11.

Kugel-reciproke und axen-ellipsoid-reciproke Körper.

Der reciproke Körper einer Krystallform, wie wir ihn definierten, ist wieder eine für die gleiche Substanz mögliche Form. Es ergiebt sich dies daraus, dass sie wieder in das gleiche Punkt-(Molekül-)Gitter eingezeichnet ist.

Würden wir uns in allen Systemen mit der Kugel begnügen und nicht, wie in den obigen Definitionen das Ellipsoid zu Hülfe nehmen, so

könnten wir auch in Bezug auf die Kugel jedesmal den reciproken Körper suchen. Dieser würde aber nicht mehr als Krystallform für die gleiche Substanz möglich sein, da das Axenverhältnis nicht mehr das gleiche und im monoklinen und triklinen System auch die Axenwinkel nicht mehr die nämlichen blieben. Wir können diese neuen Krystallelemente ermitteln, wenn wir zu dem Einheitsoktaïd das reciproke Hexaïd in Bezug auf die Kugel konstruieren. War das Axenverhältnis im quadratischen und hexagonalen System a : a : c, so wird es für R = 1 beim reciproken Körper $\frac{1}{a} : \frac{1}{a} : \frac{1}{c}$. Im rhombischen System erhalten wir $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$, wo wieder a : b : c das ursprüngliche Axenverhältnis ist.

Im monoklinen und triklinen System stehen die Richtungen der a-, b-, c- Axen des reciproken Körpers bezüglich senkrecht auf der bc-, ca- und ab- Ebene. Die Richtung der b-Axe im monoklinen System bleibt die gleiche. Bezeichnen wir in den beiden letzten Systemen den Winkel zwischen der neuen und alten a-Axe mit λ, desgleichen mit μ und ν den Winkel zwischen ursprünglicher und reciproker b- bezüglic c-Axe, so wird das Axenverhältnis des reciproken Körpers

$$\frac{1}{a \cos \lambda} : \frac{1}{b \cos \mu} : \frac{1}{c \cos \nu}$$

im triklinen und

$$\frac{1}{a \cos \lambda} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c \cos \nu}$$

im monoklinen System.

Wir wollen diese neue Art von reciproken Körpern als „kugel reciproke“ bezeichnen, während wir die nach § 6 oder 9 definirten Körper zur Unterscheidung „axenellipsoid-reciprok“ nennen wollen und den Ausdruck reciprok kurzweg nur da gebrauchen, wo jedes Missverständnis ausgeschlossen ist.

Die „kugel-reciproken“ Körper spielen beim Krystallzeichnen eine gewisse Rolle und wir werden im folgenden Teil der Arbeit wiederholt auf sie zurückkommen. Die Berechnung der kugel-reciproken Körper ist die gleiche, wie im regulären System, wenn man im quadratischen System in den Formeln des § 4 statt h, k, l bezüglich setzt $\frac{h}{a}, \frac{k}{a}, \frac{l}{c}$, im rhombischen System $\frac{h}{a}, \frac{k}{b}, \frac{l}{c}$ und wenn man im monoklinen und triklinen System rechtwinkelige Hilfsaxen einführt. Setzt man ebenso in den Formeln des § 10 statt h, k, l, i bez. $\frac{h}{a}, \frac{k}{a}, \frac{l}{a}, \frac{i}{c}$, so ergeben auch diese Formeln den kugel-reciproken Körper.

Im regulären System giebt es natürlich nur kugel-reciproke Körper. Im quadratischen und hexagonalen System entsprechen den Polen in der ab-Ebene die gleichen Ebenen beim axenellipsoid-reciproken wie beim kugel-reciproken Körper.

§ 12.

Bezeichnungsweise von Flächen, Ecken und Kanten, um deren Zahlenverhältnisse zum Ausdruck zu bringen.

Analog der im § 1 wiedergegebenen Tabelle, welche die Zahlenverhältnisse der Flächen, Ecken und Kanten der regelmässigen Vielflache der Geometrie veranschaulicht, wollen wir jetzt versuchen eine ähnliche Tabelle für die einfachen, geschlossenen Formen der Krystallographie und deren reciproke Körper aufzustellen.

Nennen wir eine Ecke n-zählig, wenn in ihr n Kanten (und n Flächen) zusammenstossen, desgleichen eine Fläche m-zählig, wenn sie von m Kanten (und m Ecken) begrenzt wird, so sehen wir, dass bei einem regelmässigen Körper der Geometrie alle Flächen unter sich gleichzählig sind, desgleichen unter sich auch alle Ecken. Beim Würfel z. B. treten nur 4-zählige Flächen und nur 3-zählige Ecken auf. Bei den krystallographischen Körpern jedoch können die Flächen unter sich verschiedenzählig sein, desgleichen auch die Ecken. Eine n-zählige Ecke wollen wir zur Abkürzung mit E (n), eine m-zählige Fläche mit F (m) bezeichnen. Es liefert also der Achtundvierzigflächner folgende anschauliche Bezeichnung seiner Flächen und Ecken:

$$48\,F\,(3) + 6\,E\,(8) + 8\,E'\,(6) + 12\,E''\,(4).$$

Bei einer Kante können wir die nähere Bezeichnung dadurch ausdrücken, dass wir in eine Klammer hinter den Buchstaben K zuerst die Symbole der Flächen setzen, welche die Kante trennt und hierauf die Symbole der Ecken, welche die Kante verbindet. Die Bezeichnung der Flächen und Ecken innerhalb der Klammer braucht natürlich nur soweit ausgedehnt zu werden als es die Deutlichkeit verlangt. Wir erhalten z. B. für den Achtundvierzigflächner:

$$24\,K\,(F:F,\ E:E') + 24\,K'\,(F:F,\ E:E'') + 24\,K''\,(F:F,\ E':E'').$$

Aus diesen Symbolen verbunden mit den für Flächen und Ecken angegebenen kann man auch ablesen, welcher Art die auf einer bestimmten Fläche liegenden Ecken und die Nachbarflächen sind, desgleichen welcher Art die an eine bestimmte Ecke anstossenden Flächen, sowie die Nachbarecken sind. Die Bezeichnung giebt also in Betreff der Zahlverhältnisse von Flächen, Ecken und Kanten jede gewünschte Auskunft.

Die oben besprochene Bezeichnung ist in der nachfolgenden Tabelle der einfachen, geschlossenen Formen und deren reciproken Körper eingeführt, welche demnach wohl keiner weiteren Erklärung bedarf. Von den in der Tabelle angeführten Körpern besitzen die einen lauter gleiche Flächen und die anderen weisen lauter gleiche Ecken auf.

Zur Kontrolle der Tabelle kann ausser dem Eulerschen Satz: Die Anzahl der Flächen u. Ecken zusammengenommen ist gleich der um zwei vermehrten Anzahl der Kanten, auch die Beziehung benutzt werden: Die Summe der Produkte aus der Anzahl gleichartiger Flächen und ihrer Zähligkeit ist gleich der bezüglich der Ecken in gleicher Weise gebildeten Summe und auch gleich der doppelten Anzahl der Kanten. Z. B. beim Achtundvierzigflächner: $48 + 6 + 8 + 12 = 24 + 24 + 24 + 2$ und $48 \cdot 3 = 6 \cdot 8 + 8 \cdot 6 + 12 \cdot 4 = 2 \cdot (24 + 24 + 24)$.

§ 13.

Tabelle der einfachen geschlossenen Formen und der reciproken Körper derselben.*)

I. Reguläres System.

1. Regulär holoëdrische Gruppe.

Oktaëder, O; $8\,F(3),\ 6\,E(4),\ 12\,K\{F:F,\ E:E\}$
Würfel, $\infty O\infty$; $6\,F(4),\ 8\,E(3),\ 12\,K\{F:F,\ E:E\}$

Rhombendodekaëder, $\infty\,O$; $12\,F(4),\quad 6\,E\,(4)+\ 8\,E'(3),\ 24\,K\{F:F,\ E:E'\}$
$\infty O\infty$. O im Gleichgew.; $\quad 6\,F\,(4)\ +8\,F'(3),\quad 12\,E\,(4),\ 24\,K\{F:F',\ E:E\}$

Pyramidenoktaëder $m\,O$; $\qquad 24\,F\,(3),\quad 6\,E\,(8)+8\,E'(3),\ 12\,K\{F:F,\ E:E\}+24\,K\{F:F,\ E;E'\}$
$\infty O\infty$. O; ($\infty O\infty$ vorherrschend); $\quad 6\,F(8)\ +\ 8\,F'(3),\ 24\,E\ (3),\ \ 12\,K\{F:F,\ E:E\}+24\,K\{F:F',\ E:E\}$

Pyramidenwürfel, ∞On; $\qquad 24\,F\,(3),\quad 8\,E\ (6)+\ 6\,E'(4),\ 12\,K\{F:F,\ E:E\}+24\,K\{F:F,\ E:E'\}$
O. $\infty O\infty$; (O vorherrschend); $\ 8\,F\,(6)+6\,F'(4),\quad 24\,E\ (3),\ \ 12\,K\{F:F,\ E:E\}+24\,K\{F:F',\ E:E\}$

Ikositetraëder $\qquad mOm$; $24\,F\,(4),\quad 6\,E\ (4)+12\,E'\,(4)+8\,E''\ (3),\ 24\,K\{F:F,\ \ E:E'\}+24\,K\{F:F,\ \ E':E''\}$
$\infty O\infty$. O. ∞O im Gleichgew.; $\ 6\,F\,(4)+12\,F'\,(4)+\ 8\,F''\,(3),\quad 24\,E\ (4),\ 24\,K\{F:F',\ E:E\}+24\,K\{F':F'',\ E:E\}$

Achtundvierzigflächner $\Big\}$ mOn; $48\,F(3),\ \ 6\,E\,(8)+\ 8\,E'\,(6)+12\,E''\,(4),\ 24\,K\{F:F,\ E:E'\}+24\,K\{F:F,\ \ E:E''\}+24\,K\{F:F,\ \ E':E''\}$
$\infty O\infty$. O. ∞O; $\qquad 6\,F(8)+8\,F'(6)+12\,F''(4),\quad 48\,E(3),\ 24\,K\{F:F',\ E:E\}+24\,K\{F:F'',\ E:E\}+24\,K\{F':F'',\ E:E\}$

2. Tetraëdrisch-hemiëdrische Gruppe.

Würfel, Rhombendodekaëder und Pyramidenwürfel wie bei 1; statt O ist $+\frac{O}{2}\cdot-\frac{O}{2}$ zu setzen.

Tetraëder $\pm\frac{O}{2}$; 4 F (3), 4 E (3), 6 K{F : F, E : E}

Tetraëder $\mp\frac{O}{2}$; 4 F (3), 4 E (3), 6 K{F : F, E : E}

Deltoëder $\pm\frac{m\,O}{2}$; 12 F (4), 6 E (4) + 4 E′ (3) + 4 E″ (3), 12 K{F : F, E : E′} + 12 K{F : F, E : E″}

$\infty O\infty \cdot \mp\frac{O}{2}\cdot\pm\frac{O}{2}$; 6 F (4) + 4 F′ (3) + 4 F″ (3), 12 E (4), 12 K{F : F′, E : E} + 12 K{F : F″, E : E}

Pyramidentetraëder, $\pm\frac{m\,O\,m}{2}$; 12 F (3), 4 E (6) + 4 E′ (3), 6 K{F : F, E : E} + 12 K{F : F, E : E′}

Tetraëder und Gegentetraëder; 4 F (6) + 4 F′ (3), 12 E (3), 6 K{F : F, E : E} + 12 K{F : F′, E : E}

Hexakistetraëder $\pm\frac{m\,O\,n}{2}$; 24 F (3), 4 E (6) + 6 E′ (4) + 4 E″ (6), 12 K{F : F, E : E′} + 12 K{F : F, E : E″} + 12 K{F : F, E′ : E″}

$\mp\frac{O}{2}\cdot\infty\,O\,\infty\cdot\pm\frac{O}{2}$ 4 F (6) + 6 F′ (4) + 4 F″ (6), 24 E (3), 12 K{F : F′, E : E} + 12 K{F : F″, E : E} + 12 K{F′ : F″, E : E}

3. Gyroëdrisch-hemiëdrische Gruppe.

Alle Formen mit Ausnahme des Achtundvierzigflächners wie bei 1.

Gyroëder $\begin{matrix}l\\r\end{matrix}\frac{m\,O\,n}{2}$; 24 F (5), 6 E (4) + 8 E′ (3) + 24 E″ (3), 24 K{F : F, E : E′} + 24 K{F : F, E′ : E″} + 12 K{F : F, E″ : E″}

$\infty O\infty \cdot O\cdot\begin{matrix}r\\l\end{matrix}\frac{m'On'}{2}$; } 6 F (4) + 8 F′ (3) + 24 F″ (3), 24 E (5), 24 K{F : F″, E : E} + 24 K{F′ : F″, E : E} + 12 K{F″ : F″, E : E}
im Gleichgew.

*) Einige seltenere Formen wurden der Raumersparnis wegen nicht in die Tabelle aufgenommen.

4. Pentagonal-hemiëdrische Gruppe.

Pentagondodekaëder $\begin{matrix} l \\ r \end{matrix}\left[\frac{\infty\ O\ n}{2}\right]$; $12\,F(5)$, $12\,E(3) + 8\,E'(3)$, $6\,K\{F:F,\ E:E\} + 24\,K\{F:F,\ E:E'\}$

$\begin{matrix} r \\ l \end{matrix}\left[\frac{\infty\ O\ n'}{2}\right] . O$ (im Gleichgew.); $12\,F(3) + 8\,F'(3)$, $12\,E(5)$, $6\,K\{F:F,\ E:E\} + 24\,K\{F:F',\ E:E\}$

Diploëder $\begin{matrix} l \\ r \end{matrix}\left[\frac{m\ O\ n}{2}\right]$ $24\,F(4)$, $6\,E(4) + 12\,E'(4) + 8\,E''(3)$, $(12+12)\,K\{F:F,\ E:E'\} + 24\,K\{F:F,\ E':E''\}$

$\infty\ O\ \infty\ .\ \begin{matrix} r \\ l \end{matrix}\left[\frac{\infty\ O\ n'}{2}\right]$ O (im Gl.); $6\,F(4) + 12\,F'(4) + 8\,F''(3)$, $24\,E(4)$, $(12+12)\,K\{F:F',\ E:E\} + 24\,K\{F':F'',\ E:E\}$

Die andern Formen wie bei 1.

5. Tetartoëdrische Gruppe.

Tetartoëder

$+r(-r,+l,-l)\frac{m\ O\ n}{4}$ $\Big\}$ $12\,F(5)$, $4\,E(3) + 4\,E'(3) + 12\,E''(3)$, $12\,K\{F:F,\ E:E''\} + 12\,K\{F:F,\ E':E''\} + 6\,K\{F:F,\ E'':E''\}$

$-\frac{O}{2} \cdot + \frac{O}{2}$

$-r(+r,-l,+l)\frac{m'On'}{4}$ $\Big\}$ $4\,F(3) + 4\,F'(3) + 12\,F''(3)$, $12\,E(5)$, $12\,K\{F:F'',\ E:E\} + 12\,K\{F':F'',\ E:E\} + 6\,K\{F'':F'',\ E:E\}$

II. Hexagonales System.

1. Hexagonal-holoëdrische Gruppe.

Sechsseitige Pyramide der ersten (zweit.) St.; $12\,F(3)$, $2\,E(6) + 6\,E'(4)$, $6\,K\{F:F,\ E':E'\} + 12\,K\{F:F,\ E:E'\}$

Basis u. Prisma der zweiten (ersten) Stellung; $2\,F(6) + 6\,F'(4)$, $12\,E(3)$, $6\,K\{F':F',\ E:E\} + 12\,K\{F:F',\ E:E\}$

Zwölfseitige Pyramide; $24\,F(3)$, $2\,E(12) + 6\,E'(4) + 6\,E''(4)$, $12\,K\{F:F,\ E':E''\} + 12\,K\{F:F,\ E:E'\} + 12\,K\{F:F,\ E:E''\}$

Basis, Prisma der ersten und zweiten Stellung; $\Big\}$ $2\,F(12) + 6\,F'(4) + 6\,F''(4)$, $24\,E(3)$, $12\,K\{F':F'',\ E:E\} + 12\,K\{F:F',\ E:E\} + 12\,K\{F:F'',\ E:E\}$

---

2. Rhomboëdrisch-hemiëdrische Gruppe.

Pos. (neg.) Rhomboëder;	$6\,F\,(4),\quad 2\,E\,(3)+6\,E'(3),\quad 6K\{F:F,\ E':E'\}+6\,K\{F:F,\ E:E'\}$
Basis u. neg. (pos.) Rhomboëder i. Gl.;	$2\,F\,(3)+6\,F'\,(3),\quad 6\,E\,(4),\quad 6\,K\{F':F',\ E:E\}+6\,K\{F:F',\ E:E\}$
Pos. (neg.) Skalenoëder	$12\,F\,(3),\quad 2\,E\,(6)+\ 6\,E'\,(4),\quad 6\,K\{F:F,\ E':E'\}+(6+6)\,K\{F:F,\ E:E'\}$
Basis u. neg. (pos.) Rhomboëder;	$2\,F\,(6)+6\,F'\,(4),\quad 12\,E\,(3),\quad 6\,K\{F':F',\ E:E\}+(6+6)\,K\{F:F',\ E:E\}$

3. Pyramidal-hemiëdrische Gruppe.

Hexagonale Pyramide der rechten (linken) Zwischenstellung Basis und hexagonales Prisma der linken (rechten) Zwischenstellung	F, E und K wie bei der hexagonalen holoëdrischen Pyramide und ihrem reciproken Körper.

4. Trapezoëdrisch hemiëdrische Gruppe.

Rechtes (linkes) Trapezoëder;	$12\,F\,(4),\quad 2\,E\,(6)+12\,E'(3),\quad (6+6)\,K\{F:F,\ E':E'\}+12\,K\{F:F,\ E:E\}$
Basis und linkes (rechtes) Trapezoëder i. Gl.;	$2\,F\,(6)+12\,F'\,(3),\quad 12\,E\,(4),\quad (6+6)\,K\{F':F',\ E:E\}+12\,K\{F:F',\ E:E\}$

5. Trapezoëdrisch-tetartoëdrische Gruppe.

$+r\,(-r,+l,-l)$ Trapezoëder;	$6\,F\,(4),\quad 2\,E\,(3)+6\,E'\,(3),\quad (3+3)\,K\{F:F,\ E':E'\}+6\,K\{F:F,\ E:E'\}$
Basis u. $-r\,(+r,-l,+l)$ Trapezoëder i. Gl;	$2\,F\,(3)+6\,F'\,(3),\quad 6\,E\,(4),\quad (3+3)\,K\{F':F',\ E:E\}+6\,K\{F:F',\ E:E\}$

6. Rhomboëdrisch-tetartoëdrische Gruppe.

Geometrisch gleich mit den entsprechenden Gebilden der rhomboëdrischen Hemiëdrie.

III. Quadratisches System.

1. Holoëdrische Gruppe.

Pyramide der ersten (zweiten) Stellung;	$8\,F\,(3),\quad 2\,E\,(4)+4\,E'\,(4),\quad 4\,K\{F:F,\ E':E'\}+8\,K\{F:F,\ E:E'\}$
Basis u. Prisma der zweiten (ersten) Stellung;	$2\,F\,(4)+4\,F'\,(4),\quad 8\,E\,(3),\quad 4\,K\{F':F',\ E:E\}+8\,K\{F:F',\ E:E\}$

Achtseitige Pyramide	$16\,F(3),\quad 2\,E(8)+4\,E'(4)+4\,E''(4),\ 8\,K\{F:F, E':E''\}+8\,K\{F:F, E:E'\}+8\,K\{F:F, E:E''\}$
Basis u. Prisma der ersten u. zweiten Stellung	$2\,F(8)+4\,F'(4)+4\,F''(4),\quad 16\,E(3),\ 8\,K\{F':F'', E:E\}+8\,K\{F:F', E:E\}+8\,K\{F:F'', E:E\}$

2. Sphenoidische Hemiëdrie.

Pos. (neg.) quadratisches Tetraëder;	$4\,F(3),\ 4\,E(3),\ (2+4)\,K\{F:F, E:E\}$
Neg. (pos.) quadratisches Tetraëder;	„ „ „ „
Pos. (neg.) quadratisches Skalenoëder;	$8\,F(3),\quad 2\,E(4)+4\,E'(4),\ 4\,K\{F:F, E':E'\}+(4+4)\,K\{F:F, E:E'\}$
Neg. (pos.) Tetraëder u. Basis;	$2\,F(4)+4\,F'(4),\quad 8\,E(3),\ 4\,K\{F':F', E:E\}+(4+4)\,K\{F:F', E:E\}$

3. Trapezoëdrische Hemiëdrie.

Rechtes (linkes) quadr. Trapezoëder;	$8\,F(4),\quad 2\,E(4)+8\,E'(3),\ (4+4)\,K\{F:F, E':E\}+8\,K\{F:F, E:E'\}$
Basis, linkes (rechtes) „ „	im Gl.; $2\,F(4)+8\,F'(3),\quad 8\,E(3),\ (4+4)\,K\{F':F', E:E\}+8\,K\{F:F', E:E\}$

4. Pyramidale Hemiëdrie.

F, E, K wie bei der holoëdrischen quadratischen Pyramide erster oder zweiter Stellung.

IV. Rhombisches System.

1. Holoëdrische Gruppe.

Rhombische Pyramide	$8\,F(3),\quad 2\,E(4)+2\,E'(4)+2\,E''(4),\ 4\,K\{F:F, E':E''\}+4\,K\{F:F, E:E'\}+4\,K\{F:F, E:E''\}$
Makro- u. Brachypinakoid u. Basis	$2\,F(4)+2\,F'(4)+2\,F''(4),\quad 8\,E(3),\ 4\,K\{F':F'', E:E\}+4\,K\{F:F', E:E\}+4\,K\{F:F'', E:E\}$

2. Hemiëdrische Gruppe. (Vergl. die Bemerkung Seite 25 unten.)

V. Monoklines System
VI. Triklines System

besitzen keine einfachen geschlossenen Formen.

§ 14.

Physikalische Bedeutung der reciproken Körper.

Die physikalische Bedeutung der reciproken Körper besteht darin, dass dem Wachstumsmaximum des einen Körpers ein Wachstumsminimum des andern entspricht. Die Minima werden dem ganzen Wesen der Krystalle entsprechend hierbei nur auf Linien von möglichen Krystallkanten gemessen und nicht durch die Normale bestimmt, wenn diese nicht auch zugleich eine mögliche Krystallkante darstellt. Somit entsprechen nur im regulären System die krystallographischen Wachstumsminima dem rein mathematischen Minimum der Entfernung, d. h. der Flächennormale.

Es liegt hier folgende interessante Frage nahe: Wenn, ohne dass eine Richtung infolge der Versuchsanordnung bevorzugt wird, das eine Mal in gewissen Richtungen ein Maximum des Wachstums stattfindet, d. h. wenn in jenen Richtungen Ecken liegen und hierbei das Wachstum mit der Geschwindigkeit v, v′, v″ ... vor sich geht, das andere Mal aber in jenen Richtungen ein Minimum des Wachstums eintrifft, sind dann die relativen Geschwindigkeiten $\frac{K}{v}, \frac{K}{v'}, \frac{K}{v''} \ldots$, wobei K eine Konstante ist, oder den Vektor eines Ellipsoides darstellt? v, v′ u. s. w. sind natürlich nicht der Zeit nach zu messen, es müssen vielmehr die beiden Körper ihrer Ausdehnung nach miteinander verglichen werden. Ist es dann möglich ein Ellipsoid zu finden, auf welches man die beiden Körper als reciproke beziehen kann, so ist es höchst wahrscheinlich, dass das Verhältnis der Halbaxen des Ellipsoides identisch mit dem Verhältnis der krystallographischen Axen ist. Die Lehre von den reciproken Körpern verspricht also anwendbar zu sein bei der wichtigen Frage nach dem relativen Molekülabstand und zum wahren, eindeutigen Axenverhältnis zu verhelfen, von dem wir nur das Multiplum allerdings mit grosser Genauigkeit ermitteln konnten.

Es möge nur noch kurz darauf hingewiesen werden, dass viele Körper in der Richtung des Minimums der Tenacität ein Maximum des Wachstums aufweisen. So krystallisiert Flussspat als Würfel und ist spaltbar nach dem Oktaëder, Bleiglanz findet sich häufig in Oktaëdern und spaltet nach dem Würfel. Nach dem Rhombendodekaëder spaltet ausgezeichnet die Zinkblende und findet sich krystallisiert in zwei Tetraëdern, oft in Kombination mit dem Würfel.

Auch auf diejenigen Flussspatkrystalle möge hier hingewiesen werden, welche die Form von Oktaëder haben, aber aus lauter Würfeln bestehen. Die Subindividuen bestehen hier also aus den reciproken Körpern der scheinbaren Krystallform.

Im zweiten Teil der Arbeit werden wir an vielen Stellen wieder auf die reciproken Körper zurückzukommen haben, und diese werden uns dort bei den Konstruktionen vielfach Dienste leisten.

§ 15.

Die Flächenprojektion.

Definition u. Beziehung zur Polarprojektion.

Man denke sich den Krystall in idealer Form entwickelt und um seinen Mittelpunkt eine Kugel beschrieben. Durch den Mittelpunkt des Krystalls und die Kanten desselben lege man alsdann Ebenen, welche die Kugel in grössten Kreisen schneiden. Werden diese nach der Methode der stereographischen Projektion auf die Zeichenebene projiciert, so entsteht eine Projektion des Krystalls, welche wir die „Flächenprojektion" nennen wollen.

Will man z. B. das Oktaëder in dieser Projektion verzeichnen, so werden die Ecken desselben durch vier von einander um 90^0 abstehende Punkte des Grundkreises, sowie durch den Mittelpunkt dieses Kreises und den unendlich fernen Punkt dargestellt. Um die Kanten zu erhalten, braucht man nur diese Punkte durch grösste Kreise zu verbinden. Bezeichnen wir die drei gleichen Axen mit a, b, c, so werden die vier Kanten der Ebene a b durch den Grundkreis, die acht anderen Kanten durch die Projektion zweier zu einander rechtwinkeliger, auf dem Grundkreis senkrecht stehender, grössten Kreise abgebildet, also durch zwei mit den Axen a, b zusammenfallende Geraden, vergl. Tafel II Fig. 1 a.

Fig. 1 b stellt ebenfalls das Oktaëder dar, jedoch in polarstereographischer Projektion. Die Zonen sind aber nicht vollständig ausgezogen, sondern gehen nur von einem Pol A zum Pol B auf dem kürzeren der beiden möglichen Wege, wenn die entsprechenden Flächen a, b in einer Kante zusammenstossen.

Beim Vergleich der beiden Projektionen ergiebt sich ein wesentlicher Unterschied: Bei der Polarprojektion wird die Fläche durch den Pol (einen Punkt), bei der Flächenprojektion durch eine Fläche dargestellt.*) Die grössten Kreise stellen bei der Polarprojektion Flächenzonen, bei der Flächenprojektion Kanten dar. Ein weiterer Vergleich ergiebt sich noch, wenn in der Polarprojektion die Zonen in der oben beschriebenen Weise eingezeichnet sind, sodass sie nur zwei Nachbarflächen verbinden, wenn diese in einer Kante zusammenstossen. (Zwei Pole A, B werden also nicht verbunden, wenn a, b über Eck liegen oder wenn der Zonenzusammenhang zwischen a, b unterbrochen ist.) Es tritt dann in der Polarprojektion an Stelle der Ecke E, in welcher die Flächen P, Q, R . . . zusammenstossen, die Fläche, welche von den Zonen (PQ), (QR), (RP) . . . begrenzt wird; in der Flächenprojektion dagegen wird eine Ecke durch einen Punkt, den Schnittpunkt der Kantenkreise dargestellt.

Diese Beziehungen lassen sich in folgender Tabelle anschaulich zusammenfassen:

*) Die Bezeichnung Flächenprojektion ist aus diesem Grunde gewählt worden. Ein Vergleich dieser Projektionsmethode mit der entsprechenden der Geographie, dürfte obige Definition noch anschaulicher machen.

	Polarprojektion	Flächenprojektion
Fläche (2). . .	Punkt (0)	Fläche (2)
Kante (1) . . .	* * *	Kreis (1)
Flächenzone . .	Kreis (1)	* * *
Punkt (0) . . .	Fläche (2)	Punkt (0)

Das in irgend einer Zeile der ersten Kolonne genannte Gebilde wird bei der Polar- beziehungsweise Flächenprojektion durch die gleiche Zeile der zweiten bezüglich dritten Kolonne ausgedrückt.

Die in Klammern zugesetzten Zahlen bedeuten die Dimensionen der Gebilde. In der Polarprojektion entspricht den Gebilden der Dimensionen 0, 1, 2 eine Projektion der Dimension 2, 1, 0; in der Flächenprojektion dagegen wird jedes Element des zu projicierenden Krystalls durch ein Gebilde gleicher Dimension vertreten.

Diese Verhältnisse ergeben sich unmittelbar aus der Natur der Projektion und sind an Fig. 1a und 1b der Tafel II deutlich zu sehen. Bei der Betrachtung derselben wird man sogleich erkennen, dass Fig. 1a auch als Polar- und Fig. 2b als Flächenprojektion aufgefasst werden kann. Diese andere Auffassung entsteht, wenn man

in Fig. 1a, d. h. bei der Flächenprojektion	in Fig. 1b, d. h. bei der Polarprojektion
die Ecken als Pole	die Pole als Ecken
„ Kanten „ Flächenzonen	„ Flächenzonen als Kanten
„ Flächen „ Ecken	„ Ecken „ Flächen

auffasst. Die Figuren stellen aber jetzt einen neuen Körper dar, nämlich einen Würfel.

Der Würfel ist bekanntlich ein reciproker Körper des Oktaëders. Die vertauschte Auffassung der Figuren 1a, 1b hat also den reciproken Körper geliefert.

Aus der Entstehungsweise der Flächen- und der Polarprojektion folgt, dass die in dem Beispiel hervortretende Beziehung für alle regulären Körper Geltung hat. Wir haben also für das reguläre System den Satz:

Eine Polarprojektion als Flächenprojektion	Eine Flächenprojektion als Polarprojektion

aufgefasst ergiebt den reciproken Körper.

In den übrigen Systemen haben wir zweierlei Polarprojektionen zu unterscheiden, die

normale Polarprojektion und die konjugierte Polarprojektion.

Unter der normalen Polarprojektion wollen wir die gewöhnliche Polarprojektion der Krystallographie verstehen. Sie entsteht bekanntermassen, indem man auf eine jede Fläche eine Normale errichtet vom Mittelpunkte einer Kugel aus und diese Normalen zum Schnitt mit der Kugel bringt, welche dann stereographisch projiciert wird.

Bei der konjugierten Polarprojektion konstruiere man um den Mittelpunkt der idealen Krystallform das Ellipsoid, das zu seinen Axen (im

monoklinen und triklinen System zu konjugierten Durchmessern) die krystallographischen Axen hat. Zu jeder Krystallfläche konstruiere man dann den konjugierten Durchmesser und bringe diesen zum Schnitt mit einer um den Mittelpunkt konstruierten Kugel, welche dann stereographisch projiciert wird.

Die normale Polarprojektion hat für die Krystallberechnung die bekannte Anwendbarkeit.

Lässt man eine Krystallform nach dem Ableitungsprinzip aus dem regulären Punktsystem entstehen, so entsprechen den Flächennormalen die konjugierten Durchmesser. Die konjugierte Polarprojektion wird also überall da Dienste leisten, wo es sich um das Studium der Verwandtschaftsverhältnisse einer Krystallform mit der entsprechenden regulären handelt.

Im regulären System sind beide Arten von Polarprojektionen identisch.

Zeichnet man von einer Krystallform die konjugierte Polarprojektion und fasst diese als Normalpolarprojektion auf, so entsteht im quadratischen, hexagonalen und rhombischen System ein Körper mit gleichen Indices, aber Axenlängen, die denen des ursprünglichen Körpers reciprok sind, der Richtung nach jedoch mit den ursprünglichen Axen zusammenfallen.

Es ergeben sich nämlich nichts anderes als die axenellipsoid- und kugel-reciproken Körper der gleichen Flächenprojektion. Sie zeigen deswegen auch im monoklinen und triklinen System die hier nicht noch einmal aufgeführten Eigenschaften dieser Körper (Vergl. § 11).

Unter Zugrundlegung dieser beiden Arten von Polarprojektionen ergiebt sich ohne weiteres folgender zweifacher Doppelsatz:

Eine $\frac{\text{normale}}{\text{konjugierte}}$ Polarprojektion als Flächenprojektion | Eine Flächenprojektion als $\frac{\text{normale}}{\text{konjugierte}}$ Polarprojektion aufgefasst, ergiebt den $\frac{\text{kugel-}}{\text{axenellipsoid-}}$ reciproken Körper.

Von diesen reciproken Beziehungen der Flächen- und Polarprojektion werden wir im folgenden einige wichtige Anwendungen machen. Die reciproken Beziehungen zeigen noch weitere Analogien, wenn wir die Ein- und Vieldeutigkeit der Projektionen betrachten und wenn wir die geometrische Bedeutung der Kreis-Mittelpunkte der Projektionen näher verfolgen.

§ 16.

Eindeutigkeit und Vieldeutigkeit der Flächen- und Polarprojektion.

Die Figur a der Tafel IV stellt uns den Achtundvierzigflächner dar. Die Projektion ist unabhängig von dem Parameterverhältnis des Achtundvierzigflächners und ist somit gewissermassen der Grundtypus aller Hexakisoktaëder. Welches Parameterverhältnis diese auch immer haben mögen, sie projicieren sich in der gleichen Weise. Was hier im speciellen Fall die Figur zeigt, gilt allgemein für alle holoëdrischen einfachen Formen. Die Kanten fallen nämlich bei diesen Körpern stets in die Symmetrieebenen.

Da nun diese Ebenen in ihrer Lage fest sind, so können die Kanten bei der Aenderung des Parameterverhältnisses nur eine Verschiebung in diesen Ebenen erleiden, was auf die Projektion keinen Einfluss hat.

Anders verhält es sich bei Kombinationen. Wenn hier bei gleichbleibenden Parametern die relativen Grössenverhältnisse der Flächen zu einander geändert werden, so verschieben sich hierbei die Kanten und mit ihnen die Ebenen, die durch die Kanten und den Mittelpunkt bestimmt werden. Diese Ebenen schneiden die Kugel in anderen grössten Kreisen und es ändert sich damit auch die Projektion.

Es ist dies ein wesentlicher Unterschied von der Polarprojektion. Bei dieser wird jede Kombination durch die gleiche Projektion dargestellt, gleichviel, welche von den in Kombination befindlichen Grundformen überwiegt. Eine einfache Form dagegen ändert mit dem Parameterverhältnis auch die Projektion.

Bei der Polarprojektion werden also die einfachen Körper individuell dargestellt, die Kombinationen dagegen generell. Umgekehrt ist dies bei der Flächenprojektion. Sie bietet eine allgemeine Darstellung eines einfachen holoëdrischen Körpers, dagegen bringt sie bei den Kombinationen den durch das Ueberwiegen einer Form etc. hervorgerufenen Charakter zum Ausdruck, ist hier also individuell.

In diesem Unterschied beruht zum Teil die Wichtigkeit und Brauchbarkeit der Flächenprojektion als Ergänzung zur Polarprojektion. Wo diese zufolge ihrer Eigenheiten weniger zu gebrauchen, da tritt jene für sie ein.

Wir wollen nun sehen, wie die Eindeutigkeit und Vieldeutigkeit sich verhält, wenn man eine Polarprojektion als Flächenprojektion und umgekehrt auffasst. Nehmen wir, um ein bestimmtes Beispiel zu wählen, die generelle Darstellung des Achtundvierzigflächners d. h. die Flächenprojektion und fassen sie als Polarprojektion auf. Wir erhalten dadurch auch wieder eine generelle Polarprojektion, nämlich Würfel, Oktaëder und Rhombendodekaëder. Welche relative Ausdehnung diese einzelnen Körper besitzen, verschweigt uns die Projektion. Fassen wir nun umgekehrt die individuelle, eindeutige Projektion eines Achtundvierzigflächners (etwa von $30\frac{3}{2}$, 321) d. h. die Polarprojektion als Flächenprojektion auf, so bekommen wir wieder eine eindeutige Projektion, Würfel, Oktaëder und Rhombendodekaëder mit ganz bestimmtem relativen Grössenverhältnis der Flächen. Für einen anderen Achtundvierzigflächner (etwa 402, 421) bekommen wir auch eine andere reciproke Flächenprojektion, zwar auch Würfel, Oktaëder und Rhombendodekaëder, doch mit anderem Ausdehnungsverhältnis der Flächen. Vergl. Tafel IV Fig. b und Fig. c.

Diese Ausdehnungsverhältnisse sind von Wichtigkeit bei Krystallen, welche im ersten Beginn ihrer Entstehung sind, so dass ihre Dimensionen die Moleküldistanz nicht sehr beträchtlich überschreiten. Bei solchen Krystallen können die Flächen, da sie durch das Punktsystem bestimmt sind,

nur in gewissen rationalen Ausdehnungsverhältnissen vorkommen, die um so einfacher sind, je kleiner die Krystalldimensionen, und die geradezu beliebig werden, wenn die Moleküldistanz verglichen mit den Krystalldimensionen unendlich klein wird.

Die Flächen-Projektion der hemiëdrischen und tetartoëdrischen Formen ist nicht mehr generell. Die Lage der nicht in die Symmetrieebenen fallenden Kanten hängt von den jeweiligen Parametern ab.

§ 17.

Beziehung zwischen der Polar- und Flächenprojektion einerseits und der Quenstedtschen Linear-Projektion andererseits.

Hat man einen Körper in der (Normal-) Polarprojektion gezeichnet und entwirft auf die gleiche Zeichenebene die Quenstedtsche Projektion des gleichen Körpers, indem man alle Flächen mittelst Parallelverschiebung durch denjenigen Punkt der Kugel gehen lässt, in welchem sich das projizierende Auge befindet, und diese Flächen dann mit der Zeichenebene zum Schnitt bringt, so wird, wenn man einem Pol der Polarprojektion diejenige Sektionslinie der Quenstedtschen Projektion, welche die gleiche Ebene darstellt, entsprechend nennt, der Mittelpunkt des zwei Pole verbindenden Zonen-Kreises durch den Schnittpunkt der diesen Polen entsprechenden Sektionslinien geliefert.

Fasst man nun die Polarprojektion als Flächenprojektion auf, so lautet der entsprechende Satz:

Konstruiert man zu einer Flächenprojektion die Quenstedtsche Projektion des reciproken Körpers, indem man alle Flächen des reciproken Körpers mittelst Parallelverschiebung durch denjenigen Punkt der Kugel gehen lässt, in welchem sich das projizierende Auge befindet, und die verschobenen Flächen dann mit der Zeichenebene zum Schnitt bringt, so wird, wenn man einer Ecke der Flächenprojektion, diejenige Sektionslinie der Quenstedtschen Projektion, welche die der Ecke reciproke Ebene darstellt, entsprechend nennt, der Mittelpunkt des zwei Ecken verbindenden Kantenkreises durch den Schnittpunkt der diesen Ecken entsprechenden Sektionslinien dargestellt.

§ 18.

Konstruktion der Flächenprojektion einer Krystallform mit Hilfe der Quenstedtschen Projektion des reciproken Körpers.

Durch den letztgenannten Satz sind wir in den Stand gesetzt, die Mittelpunkte der Kantenkreise der Flächenprojektion zu finden. Sind diese bestimmt, so sind auch die Radien der Kantenkreise leicht zu ermitteln durch die Ueberlegung, dass die Projektionen der Kantenkreise als Projektionen von grössten Kreisen den Grundkreis in zwei gegenüberliegenden Punkten schneiden müssen. Errichten wir also im Mittelpunkt des Grundkreises eine Senkrechte auf die Verbindungsgerade dieses Mittelpunktes mit dem

Mittelpunkt des gesuchten Kantenkreises, so muss dieser durch die Schnittpunkte jener Senkrechten mit dem Grundkreis gehen.

Der reciproke Körper — es handelt sich hier immer um den kugelreciproken — wird in der oben (§ 4, 8, 10) beschriebenen Weise berechnet und dann auf kariertes Papier gezeichnet. Es wird hierdurch in den meisten Fällen ermöglicht, den Ort der Schnittpunkte direkt durch seine Koordinaten anzugeben, nur in wenigen Fällen wird man genötigt sein denselben zu berechnen.

Die Koordinaten x, y des Schnittpunktes zweier Sektionslinien mit den Axenabschnitten r_1, s_1 bezüglich r_2, s_2 und den Indices h_1, k_1 bezüglich h_2, k_2 ergeben sich aus den Gleichungen

$$h_1 x + k_1 y = \varkappa_1$$
$$h_2 x + k_2 y = \varkappa_2$$

wobei $\varkappa_1 = h_1 r_1 = k_1 s_1$ und $\varkappa_2 = h_2 r_2 = k_2 s_2$.

Oft kann man auch zweckmässig die Aufstellung und Auflösung der beiden Gleichungen umgehen. Man bezeichne die Subtangente der auf der einen Sektionslinie durch die a-Axe und den Schnittpunkt abgeschnittenen Strecke mit z, dann setzt sich die Subtangente der anderen aus z und einer bekannten Strecke zusammen Man multipliziere nun die erste Subtangente mit $\frac{s_1}{r_1}$ die zweite mit $\frac{s_2}{r_2}$ und setze die beiden Produkte einander gleich. Aus dieser Gleichung, welche aussagt, dass im Schnittpunkt die beiden Sektionslinien gleich hoch gestiegen sind, ergiebt sich z nach dessen Ermittelung sogleich auch x und y gefunden wird. Die angegebene Methode ist, wie der Gebrauch bei den Konstruktionen zeigte, eine ebenso schnelle wie handliche.

Die Quenstedtsche Linear-Projektion braucht natürlich in den holoëdrischen Systemen nur etwa für einen Quadranten gezeichnet zu werden.

Die direkte Berechnung der Mittelpunkte aus den Parametern der zwei Flächen, welche den sich schneidenden Sektionslinien entsprechen, ohne die Sektionslinien selbst zu zeichnen, ist umständlicher und weniger anschaulich, wodurch wieder leichter Fehler veranlasst werden.

§ 19.

Rein konstruktive Zeichnung eines Körpers in Flächenprojektion.

Es handelt sich hier lediglich um die Zeichnung der Kantenkreise. Dieselben sind, weil grösste Kreise, schon durch zwei nicht auf einem Durchmesser liegende Punkte bestimmt. Sind durch die Symmetrieverhältnisse schon zwei Punkte, etwa die Eckpunkte der Kante gegeben, so konstruiere man zu einem der Punkte den auf dem andern Endpunkt des gleichen Durchmessers liegenden und lege durch diese drei Punkte einen Kreis.

Man vermeide hierbei die üblichen Mittelnormalen, welche leicht die Zeichnung mit einem störenden Liniengewirr bedecken, und verfahre nach folgender versuchsweiser Methode, welche ich durchgehends bei den rein konstruktiv gewonnenen Zeichnungen angewandt habe. Man setze den Zirkel in die zwei äusseren der drei Punkte ein und ziehe aus beiden einen Kreisbogen an der Stelle, wo schätzungsweise der Mittelpunkt liegt mit gleichem, entsprechend gewähltem Radius. Diese Kreisbogen zeichne man aber nicht auf das zur Konstruktion benutzte Papier, sondern lege über dieses ein anderes an die betreffende Stelle. Setzt man jetzt den Zirkel mit unveränderter Oeffnung

in den mittleren Punkt ein, so reicht die andere Zirkelspitze entweder nicht bis zum Schnittpunkt oder darüber hinaus oder trifft endlich gerade in den Schnittpunkt. Im ersten Fall hat man die Zirkelöffnung kleiner (grösser), im zweiten grösser (kleiner) zu wählen, wenn die Punkte auf einem Kreisbogen liegen, der kleiner (grösser) als 180° ist; im dritten Fall aber ist der gesuchte Radius gleich der Zirkelöffnung und der Schnittpunkt der Mittelpunkt des Kreises. Durch Wiederholung des Verfahrens findet man bei einiger Uebung fast immer schon beim dritten Mal den Mittelpunkt. Das Verfahren ist genauer und geht mindestens ebenso schnell als das Zeichnen der Mittelnormalen, da bei letzterem verschiedene Zeicheninstrumente gewechselt werden müssen, während nach unserem Verfahren der Zirkel stets in der Hand bleibt.

Bei flachen Kreisbogen kann auch das Kreislineal von Fedorow [1]) mit Vorteil verwendet werden.

Ist nur ein Punkt der Kante in der Flächenprojektion gegeben, so ist der Schnittpunkt der Kante mit der ab-Ebene aufzusuchen und auf den Grundkreis zu projizieren. Liegt aber der einzige von vornherein gegebene Punkt der Kante schon auf dem Grundkreis, so suche man den Schnitt der Kante mit der ac- oder bc-Ebene und verzeichne diesen Schnittpunkt in der Flächenprojektion.

Ist endlich im allgemeinsten Fall kein Punkt der Kante schon in der Flächenprojektion vorhanden, so bringe man die Kante zum Schnitt mit zweien der genannten Ebenen und zeichne die Projektion dieser Schnittpunkte.

§ 20.

Allgemeine Bemerkungen zu den Zeichnungen.

Den Zeichnungen, welche die Verwendbarkeit und die Eigenart der Flächenprojektion illustrieren sollen, wurden jedesmal Einzelerklärungen beigegeben, welche bei den Tafeln II—VII den Figuren, auf die sie sich beziehen, gerade gegenüber stehen, so dass die Nummern der Figuren in der Zeichnung nicht wiederholt zu werden brauchten, sondern nur bei den Erklärungen angegeben sind. Diese Einzelerklärungen enthalten neben dem Namen und der Bezeichnungsweise der Krystallformen, die sich bei der Auffassung der Zeichnung als Polar- und Flächenprojektion ergiebt, auch die Koordinaten der Mittelpunkte der Kantenkreise, da, wenn diese gegeben sind, die Figur mathematisch genau bestimmt ist. Die Mittelpunkte sind ausserdem in den Konstruktionen durch Punkte angegeben, wodurch es möglich wurde die Vorzeichen der Koordinaten zu vernachlässigen, da sich diese ja durch den Vergleich mit der Zeichnung unmittelbar ergeben.

Die Einzelerklärungen enthalten ausserdem noch kurze Erläuterungen zu den Zeichnungen, welche dort, den Zeichnungen direkt beigegeben, wohl ihren zweckmässigsten Platz haben. An dieser Stelle des Textes kann ich mich deshalb auf eine kurze allgemeine Betrachtung der Tafeln beschränken und ausführlicher nur das angeben, was dort keinen Raum mehr gefunden hat.

---

1) Groth, physik. Kryst. Leipzig 1895, S. 582, Fig. 593 u. Zeitschr. f. Kryst. Bd. 21. S. 618.

§ 21.

Holoëder des regulären Systems und deren reciproke Körper.

Tafel II—IV.

Die Zeichnungen gehören paarweise zusammen. Die Figur links stellt die einfache Form, die rechts den reciproken Körper in Flächenprojektion dar. Infolge davon ist die Figur links stets generell, die rechts individuell, diese giebt also die Polarprojektion des Holoëders für ein ganz bestimmtes Parameterverhältnis und zugleich die Flächenprojektion der reciproken Kombination für bestimmte Centraldistanzen der in Kombination tretenden einfachen Formen. Auf Tafel IV wurde die Polarprojektion für zwei Parameterverhältnisse ausgeführt, die reciproken Körper zeigen dementsprechend auch verschiedenes Ueberwiegen der Flächen.

Es möge hier noch darauf aufmerksam gemacht werden, welch anschauliches Bild von dem Zonenzusammenhang eines Körpers die Flächenprojektion des reciproken Körpers liefert. Ausser an Fig. 1 d der Tafel III kann man sich dies auch an der Kombination von Würfel, Oktaëder und Rhombendodekaëder (Tafel IV) veranschaulichen, dessen Zonen so einfach durch die Kantenkreise der Flächenprojektion des Achtundvierzigflächners dargestellt werden. Die doppelte Bedeutung der Kantenkreise bietet also hier eine Stütze für das Vorstellungsvermögen und das Gedächtnis.

Man versäume auch nicht die linke und rechte Figur, also Polar- und Flächenprojektion, sich auf den gleichen Grundkreis bezogen vorzustellen, wie etwa Tafel VIII, indem man (bei gleicher Grösse der Grundkreise) eine Pause der linken Figur orientiert auf die rechte legt. Jede Ecke kommt dann in die Fläche des reciproken Körpers zu liegen, während sich die Kanten gegenseitig halbieren und in ihren Schnittpunkten senkrechte Tangenten haben. (Auf Tafel II und III wurden einige Figuren rechts auf einen kleineren Grundkreis bezogen als die entsprechende Figur links, um ein gleichmässigeres Ausfüllen der Tafel durch die Zeichnung zu erreichen).

§ 22. Hemiëder des regulären Systems.

Tafel V und VI.

Zur Darstellung der verschwindenden und sich ausdehnenden Krystallräume bei der Hemiëdrie wurde in Liebischs physikalischer Krystallographie[1]) schon die Kugelprojektion nach Art der Flächenprojektion verwandt und dadurch ein äusserst anschauliches Bild erzielt. Wir wollen hier einen Schritt weiter gehen, indem wir die Flächenprojektion nicht nur auf die Abbildung von Krystallräumen (Oktanten u. s. w.) beschränken, sondern sie als Abbildungen von Krystallkantennetzen auffassen und zeichnen.

---

1) Liebisch, Physikalische Krystallographie, Leipzig 1891 und Liebisch, Grundriss der Physikalischen Krystallographie, Leipzig 1896. Vgl. auch Liebisch, Geometrische Krystallographie, Leipzig 1881. Fig. 208 u. a.; ebenso Groth, physik. Kryst., Leipzig 1895.

Flächenprojektion des Gyroëders.

$$1\,\frac{3\,O\,\frac{3}{2}}{2} = \gamma\,(321)$$

Tafel V Fig. 2b; Tafel VI, Fig. 3b.

Das Gyroëder entsteht bekanntlich, indem von dem Achtundvierzigflächner die abwechselnden Flächen verschwinden, wie dies in Fig. 2b der Tafel V durch Schraffieren der Flächen angedeutet ist. Je nach der Wahl der verschwindenden Flächen können hierdurch zwei enantiomorphe Formen entstehen. In unserem speziellen Fall wollen wir annehmen, dass die Fläche 312 und alle abwechselnden verschwinden, die Flächen 321 und ihre abwechselnden aber sich bis zum Schnitt ausdehnen.

Die Flächenprojektion des so entstehenden Gyroëders kann entweder rein konstruktiv gewonnen werden oder es kann durch Rechnung der reciproke Körper gefunden und alsdann auf die schon früher besprochene Weise der Mittelpunkt eines jeden Kantenkreises bestimmt werden.

α. Rein konstruktive Lösung.

Von den Eckpunkten des gesuchten Körpers können wir sofort zwei Gruppen angeben. Die eine besteht aus den Würfel-, die andere aus den Oktaëderpolen, wie eine leichte mit Hilfe des schraffierten Achtundvierzigflächners durchgeführte Ueberlegung unmittelbar zeigt. Alle zu verzeichnenden Kanten bis auf zwölf gehen durch einen dieser Pole. Es sind deswegen die Kantenkreise im allgemeinen bestimmt, sobald wir die beiden Punkte kennen (oder auch nur einen von diesen), in welchem die Ebene des Grundkreises von dem Kantenkreis geschnitten wird. Wir finden diese Punkte, indem wir die Spuren der Ebenen, welche sich in jener Kante schneiden, verzeichnen und den Schnittpunkt der beiden Spuren mit dem Mittelpunkt des Grundkreises verbinden. Liegt der Pol, durch welchen der Kantenkreis gehen muss, auf dem Grundkreis, so muss in leicht durchzuführender Weise der Schnittpunkt der Kante mit der ac- oder bc-Ebene gesucht und auf die Kugel und dann auf die Zeichenebene projiziert werden.

Es handelt sich jetzt nur noch um die zwölf Kanten, welche zwei in verschiedenen Oktanten liegende Ecken verbinden z. B. die Kante zwischen den Flächen $3\,\bar{1}\,2$ und $2\,1\,3$. Nachem die übrige Konstruktion durchgeführt, sind zwar die Endpunkte dieser Kanten bestimmt, es ist aber genauer, die zwölf Kanten unabhängig hiervon zu ermitteln, was nach der allgemeinen Methode geschehen könnte, leichter aber ausgeführt wird, wenn man überlegt, dass die Kanten aus Symmetriegründen durch die Pole der Rhombendodekaëderflächen gehen müssen. Infolge dieser unabhängigen Konstruktion der besagten Kanten erhalten wir durch die doppelte Bestimmung der Endpunkte mit geringer Mühe eine schätzenswerte Kontrolle für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung.

β. Konstruktion mit Hilfe der Berechnung des reciproken Körpers.

Es handelt sich hier nur um die Quenstedtsche Projektion des reciproken Körpers, so dass es nicht darauf ankommt, das Verhältnis der Axenabschnitte der verschiedenen Ebenen untereinander zu finden, sondern nur darauf, die Parameterverhältnisse einer jeden Ebene für sich zu ermitteln, wobei man dann den Abschnitt der c-Axe gleich 1 setzen kann. Es sind also nur die Indices, nicht auch die Abstandszahl zu suchen. Ohne weitere Rechnung sehen wir, dass der reciproke Körper den Würfel und das Oktaëder als Einzelformen enthält, ausserdem aber noch ein Gyroëder, dessen Indices durch Rechnung zu ermitteln sind. Dies Gyroëder wird nach einer der angegebenen Methoden berechnet, wobei man noch kleine Vereinfachungen eintreten lassen kann, die daher rühren, dass in diesem Fall die Centraldistanz, also auch die Abstandszahl $\varkappa$ gleichgültig ist.

$$m : n : p = \frac{3}{5} : 3 : 1.$$

Die Indices sind 5 3 1; indem wir die Axenabschnitte vertauschen und den der c-Axe jedesmal gleich setzen, erhalten wir abgesehen vom Vorzeichen: $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, 1$; $5, \frac{5}{3}, 1$; $\frac{3}{5}$ 3, 1; vergl. Tafel V, Fig. 2d.

Flächenprojektion des Diploëders.

$$l\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right] = \pi\,(3\ 2\ 1)$$

Tafel V, Fig. 2 a; Tafel VI, Fig. 3 a.

Die von einem Oktaëderpol ausgehenden Kanten eines Oktanten des Diploëders haben die gleichen Mittelpunkte wie beim Gyroëder, doch reichen sie bis zu den Hauptsymmetrieebenen. Die entsprechenden Kanten der Nachbaroktanten sind zum Unterschied vom Gyroëder zum erstgezeichneten Oktanten symmetrisch in Bezug auf die Hauptsymmetrieebenen. Die übrigen Kanten liegen in den Hauptsymmetrieebenen.

Wie beim Gyroëder ist auch der Fig. 2 a Tafel V die Flächenprojektion des Achtundvierzigflächners mit dünneren Linien beigefügt und es sind hierbei die sich ausdehnenden Flächen schraffiert worden, das Gleiche gilt auch bei der

Flächenprojektion des Hexakistetraëders.

$$+\frac{3O\frac{3}{2}}{2} = \tau\,(3\ 2\ 1)$$

Tafel V Fig. 2 c; Tafel VI, Fig. 3 c.

Die Flächenprojektion des Hexakistetraëders ist die gleiche wie beim Hexakisoktaëder, nur fehlen die in den Hauptsymmetrieebenen liegenden Kanten. Die Symmetrieverhältnisse der Projektion sind nur scheinbare, es ist dies in der Figur durch verschiedene Bezeichnung der in den Nachbaroktanten liegenden Ecken angedeutet.

Flächenprojektion des Tetartoëders.

$$+1\frac{3O\frac{3}{2}}{4} = \pi\tau\,(3\,2\,1)$$

Tafel VI, Fig. 4 a, 4 b, 4 c; Tafel V, Fig. 5.

Wendet man auf den Achtundvierzigflächner
zuerst die gyroëdrische und dann die tetraëdrische Hemiëdrie oder
„ „ pentagonale „ „ „ tetraëdrische „ an,
so entsteht das reguläre Tetraëder. Den gleichen Körper erhält man auch, wenn man die Reihenfolge der Hemiëdrien umkehrt, wenn man also auf den Achtundvierzigflächner
zuerst die tetraëdrische und dann die gyroëdrische Hemiëdrie oder
„ „ tetraëdrische „ „ „ pentagonale „
anwendet.

Tafel VI, Fig. 4 a, 4 b, 4 c veranschaulichen dies. Wir sehen aus dem Gyroëder ebenso wie aus dem Diploëder durch Anwendung der tetraëdrischen Hemiëdrie das Tetartoëder entstehen. Lässt man auf das Hexakistetraëder die pentagonale oder die gyroëdrische Hemiëdrie einwirken, so bleibt sich dies ganz gleich, da in den abwechselnden Oktanten, in welchen die Verschiedenheit der letztgenannten Hemiëdrien auftritt, sich keine Flächen vorfinden. Es stellt die gleiche Figur also beide Fälle dar.

Bei der Zeichnung ist darauf zu achten, dass die von den Oktaëderpolen ausgehenden Kanten in den von der Hemiëdrie nicht betroffenen Oktanten die gleichen sind wie bei dem entsprechenden Gyroëder oder Diploëder. Alle anderen Kanten müssen auf die schon angegebene Weise bestimmt werden.

Der reciproke Körper besteht aus dem Oktaëder und einem Tetartoëder mit den Indices 5 2 1.

Es ist gut zur Orientierung die Hälfte der Quenstedtschen Projektion auszuführen und somit die Hälfte der Mittelpunkte direkt zu bestimmen, obgleich sich dann herausstellt, dass die Mittelpunkte symmetrisch zur Axe a und b liegen, eine Symmetrie, welche die Flächenprojektion nicht besitzt.

Die Koordinaten der Mittelpunkte im positiven Quadranten sind:

$$0,\ 2;\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{2},\ 0;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1,\ 2;\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3};\ 2,\ 1;\ 3,\ 4.$$

hierbei dürfen die x- und y-Koordinaten nicht miteinander vertauscht werden, (wie z. B. bei den Koordinaten der Mittelpunkte bei den Holoëdern.)

§ 23.

Hexagonales System.

Tafel VII.

Die Tafel VII zeigt, wie aus der zwölfseitigen Pyramide das Rhomboëder der Zwischenstellung und das gleichfalls tetartoëdrische Trapezo-

eder jedes auf zwei verschiedenen Wegen entstehen können. Für das Rhomboëder der Zwischenstellung führen diese Wege entweder von Fig. 1 über Fig. 2 a, 3 a und 4 a oder über Fig. 2 b, 3 b und 4 b nach Fig. 5 a b. In gleicher Weise kann man zum tetartoëdrischen Trapezoëder von Fig. 1 über Fig. 2 b, 3 b und 4 b′ oder über Fig. 2 c, 3 c, 4 c nach Fig. 5 b′ c gelangen.

Die Symbole der einzelnen Formen wurden der Raumersparnis wegen in der Einzeltabelle nicht näher angegeben. Eine jede Fläche der als Flächenprojektion wiedergegebenen Körper hat abgesehen vom Vorzeichen und der Vertauschung der a- Axen die Indices 2 1 $\bar{3}$ 1. Die Länge der a- und der c- Axe wurde in der Zeichnung der Einfachheit wegen gleich gross angenommen, und gleich der Einheit gesetzt.

Das dem ursprünglichen Skalenoëder reciproke (das also in Polarprojektion gezeichnet ist) hat die Indices 3 0 $\bar{3}$ 1. Dem hemiëdrischen Trapezoëder entspricht als reciproker Körper ein Trapezoëder mit den Indices 4 1 $\bar{5}$ 1; dem tetartoëdrischen Trapezoëder ein solches mit den Indices 6 3 $\bar{9}$ 4 dem Rhomboëder der Zwischenstellung endlich ein Rhomboëder mit den Indices 6 3 $\bar{9}$ 7; über die Lage dieser Fläche zu den Sextanten und zu dem ursprünglichen Körper geben die Zeichnungen der Tafel VII die übersichtlichste Auskunft, da in ihnen jede Ecke als Pol aufgefasst die Fläche des reciproken Körpers darstellt. Alles weitere ist den Einzelerklärungen zu entnehmen.

Die Aufeinanderfolge der pyramidalen und trapezoëdrischen Hemiëdrie wurde weggelassen, da der entstehende Körper keine grosse Wichtigkeit besitzt und auch keine geschlossene Form darstellt.

§ 24.

Zwillinge.

Denkt man sich eine Krystallform in der Flächenprojektion verzeichnet und dreht einen Teil derselben um eine Zwillingsaxe, so dass hierdurch ein Zwilling entsteht, so handelt es sich bei der Zeichnung des Zwillings um folgende Arten von Ecken und Kanten:

1. Die schon gezeichneten Ecken und Kanten des stehen gebliebenen Teiles des Zwillings.

2. Die Ecken und Kanten des um 180° gedrehten Teiles, welche den unter 1. angeführten des festen Teiles entsprechen.

3. Die Durchdringungskanten und -Ecken der beiden Individuen, welche durch die Zwillingsbildung neu entstanden sind.

Soll ein Zwillingskrystall gezeichnet werden, so konstruiert man zweckmässig, wenigstens zum Teil, den einfachen Krystall und verzeichnet den Schnitt der Zwillingsebene mit der Kugel. Da wir die Zwillingsebene durch den Kugelmittelpunkt gehen lassen, ist dieser Schnitt ein grösster Kreis. Wird nun zu einem Punkt P, dessen Projektion vor der

Drehung in der Zeichnung in P′ liegt, die neue Lage P″ nach der Drehung um 180° gesucht, so finden wir diese durch folgende Ueberlegung. Bezeichnen wir die Projektion von P auf die Kugel mit P*, legen durch P* den grössten, auf der Zwillingsebene senkrechten Kreis, welcher also durch den Pol Z der Zwillingsebene geht, und halten diesen Kreis fest, so kommt P* nach der Drehung wieder auf den Kreis zu liegen, jedoch auf die andere Seite von Z in den Punkt P*′ und es ist $\sphericalangle$ P* Z = $\sphericalangle$ Z P*′.

Wir konstruieren deshalb in der Projektionsebene den Pol Z der Zwillingsebene und dessen Gegenpunkt Z′. Ist nun zu dem in der Projektionsebene gegebenen Punkt P′ der zugehörige Punkt P″ zu suchen, so legen wir durch Z P′ Z′ einen Kreis r und tragen den Winkel Z P′ von Z aus nach der anderen Seite auf dem Kreise r ab, was mit Hilfe des Poles von r in bekannter Weise ausgeführt wird. Hierdurch ist P″ erhalten.

Sobald wir durch wiederholte Anwendung dieser Konstruktion die unter 2. aufgezählten Eckpunkte haben, sind auch die unter 2. inbegriffenen Kanten bestimmt. Man braucht ja nur den Kreis zu konstruieren, welcher durch zwei Eckpunkte einer Kante und den Gegenpunkt des einen dieser Eckpunkte geht. Doch kann der Mittelpunkt des Kreises auch unabhängig von den Eckpunkten gefunden werden.

Den Mittelpunkt M′ eines Projektionskreises k einer Kantenzone zu finden, wenn diese um einen Kugeldurchmesser um 180° gedreht worden ist.

Hat man vor der Drehung die Projektion S des Schnittpunktes S* der Kantenzonenaxe mit der Kugel verzeichnet, so kann man nach der Drehung um 180° nach der eben angegebenen Konstruktion die neue Lage S′ finden, wobei S′ die Projektion von S*′ d. i. von dem Schnittpunkt der gedrehten Kantenzonenaxe darstellt. Der Mittelpunkt M′ des Projektionskreises kann jetzt als Schnittpunkt der Zeichenebene mit einer durch den Augenpunkt A gelegten Parallele zur Verbindungsgeraden von S*′ mit dem Kugelmittelpunkt C erhalten werden: M′ liegt auf S′ C, (C = Mittelpunkt des Grundkreises), weil dies der Schnitt von ACS′ mit der Zeichenebene ist. Klappt man die Ebene ACS′ um CS′ in die Zeichenebene um, so erhält man S*′ als Schnitt von AS′ mit dem Grundkreis. Eine Parallele zu CS*′ durch A liefert auf CS′ den Punkt M′.

Besonders leicht wird die Konstruktion des zweiten Individuums, wenn die Zwillingsebene der Grundkreis ist, die Projektion des Poles also mit C zusammenfällt. In diesem Fall braucht man nur die Zeichnung selbst (z. B. eine Pause des ersten Individuums) um C um 180° zu drehen.

Die Konstruktion der unter 3. genannten Ecken und Kanten ist bei verschiedenen Gruppen von Zwillingen verschieden. Vom Standpunkt des Zeichners können wir hier wesentlich folgende Gruppen unterscheiden:

a). Die Verwachsungsfläche der Individuen ist identisch mit der Zwillingsebene, Beispiel: Spinellzwilling. Die unter 3. genannten Kanten werden alle durch die Zwillingsebene dargestellt.

b). Die Iuxtapositions- und Penetrationszwillinge. Die Kanten von 3. ergeben sich als Verbindungskreise von Schnittpunkten der Kanten von 1. und 2. Beispiel: Flussspatpenetrationszwilling, die Ergänzungszwillinge hemiëdrischer Formen.

c). In den Schnittlinien der beiden Individuen schneiden sich keine Kanten des ursprünglichen und des gedrehten Individuums. Beispiel: Karlsbader Zwilling des Orthoklas. Für die Darstellung dieser Gruppe bildet die Flächenprojektion wenig Vorteil. Zu ihrer Konstruktion ist die Zuhilfenahme der orthogonalen Projektion erforderlich.

§ 25.

Anwendung der Flächenprojektion, um günstige Annahmen für Krystallzeichnungen zu erhalten.

Wohl bei jeder Krystallmessung wird man sich zur Berechnung eine Polarprojektion des Krystalls skizzieren und wird selbst gut daran thun nach vollendeter Messung diese Polarprojektion genau zu konstruieren, wodurch etwaige grobe Versehen oder grobe Fehler in der Rechnung sogleich zu Tage treten.

Aus einer solchen Polarprojektion kann man mit Hilfe der Flächenprojektion mit leichter Mühe ein Bild des Krystalls bekommen, welches für die Zeichnung des Krystalls in Parallelperspektive von grossem Nutzen ist. Hat man nämlich in der Flächenprojektion eine günstige Annahme der Centraldistanzen erreicht, was hier ziemlich leicht ist, so braucht man nur die gleichen Verhältnisse des gegenseitigen Vorherrschens der Flächen auch in der Parallelperspektive anzuwenden, was durch Uebertragen von wenigen Punkten geschehen kann, um sicher eine günstige Annahme zu erhalten.

Die Mühe der Anfertigung der Flächenprojektion ist, wenn die Polarprojektion als gegeben vorausgesetzt wird, eine viel geringere, als die Arbeit, welche das Suchen nach einer günstigen Annahme verursacht, wenn man direkt zur Parallelperspektive geht. Besonders bei flächenreicheren Kombinationen ist dies der Fall, bei ganz einfachen Formen kann man natürlich sogleich die Parallelperspektive zeichnen.

Man denke sich die Polarprojektion P des Körpers K nur soweit ausgezeichnet, dass jeder Pol mit dem benachbarten durch einen Zonenkreis verbunden ist, wenn sich die beiden entsprechenden Flächen in einer Kante schneiden. Diese Polarprojektion P stellen wir uns jetzt als Flächenprojektion F vor, als welche sie einen Körper K′ darstellen möge, und wegen der Vieldeutigkeit der Flächenprojektion können wir über die Centraldistanzen der Ecken von K′ noch gewisse Bedingungen machen.

Finden sich bei K′ nur dreiseitige Flächen, so können wir alle Ecken

zweckmässig als auf der Kugeloberfläche liegend annehmen. Es ergiebt sich jetzt die Flächenprojektion von K, welcher Körper ja (kugel-) reciprok zu K′ ist, indem wir die Bogen der grössten Kreise zwischen zwei Ecken von K′ halbieren und im Halbierungspunkt den Bogen des grössten Kreises ziehen, welcher senkrecht auf dem ersten steht, d. h. indem wir die sphärische Mittelnormale konstruieren, jedoch nur bis zum Schnittpunkt mit den benachbarten Mittelnormalen.

Finden sich bei K′ aber Vielecke, deren Flächenzahl zum Teil die Zahl drei übersteigt, so können wir nur einen Teil der Eckpunkte auf der Kugel annehmen, da die vierten, fünften u. s. w. Eckpunkte einer Fläche durch die drei ersten bestimmt sind und im allgemeinen nicht auf der Kugel liegen werden.

In diesem Fall können wir (besonders beim Ueberwiegen der dreiseitigen Flächen von K′) die sphärischen Mittelnormalen derjenigen Bogen ziehen, welche auf der Kugeloberfläche gelegene Eckpunkte verbinden. Durch die Schnittpunkte werden wieder weitere sphärische Normalen bestimmt u. s. w.

Es ist übrigens nicht nötig, gerade auf diese Weise vorzugehen. Bedingung ist nur, dass alle Kantenkreise von K senkrecht stehen auf denjenigen von K′, dass alle Kantenkreise, welche den Seiten einer Fläche von K′ entsprechen, sich in einem Punkte schneiden und endlich, dass hinreichend viele Eckpunkte von K leicht in die Parallelperspektive übertragen werden können. Uebung wird hierbei mehr leisten als allgemeine Regeln.

Bei der praktischen Ausführung darf man sich recht viele Vereinfachungen erlauben, da es sich nur um eine angenähert günstige Annahme handelt und eine solche bei kleinen Verschiebungen immer noch günstig bleibt. Wo es sich um die Halbierung des Kreisbogens auf der Kugel handelt, darf man meist die Projektion des Kreisbogens direkt halbieren. Statt des Kreisbogens einer Kante von K darf man fast immer seine Tangente im Schnittpunkt mit dem Kantenkreis von K′ setzen und zwar mit einem um so kleineren Fehler, je flächenreicher der Krystall und je kürzer damit die Kantenkreise sind. Es bilden aber gerade auch die flächenreichen Krystallkombinationen das Gebiet, für welches unsere Methode mit dem grössten Nutzen anzuwenden ist.

Sollte das Polygon einer Fläche zu gross ausfallen, so kann man durch Verschieben der Kantenkreise leicht ein kleineres an die Stelle desselben treten lassen.

Als Beispiel möge hier erläutert werden:

Körper mit ununterbrochenem Zonenzusammenhang.

Unter einem Körper mit ununterbrochenem Zonenzusammenhang versteht man einen solchen, bei welchem jede Fläche einer Zone die beiden ihr benachbarten Flächen der gleichen Zone in vorhandenen Krystallkanten schneidet. Jede Zone lässt sich also um den ganzen Körper verfolgen als

ein geschlossener Gürtel von Flächen, die sich unter parallelen Kanten schneiden.

Eine jede Krystallform kann man zu einem solchen Körper mit ununterbrochenem Zonenzusammenhang ergänzen durch Zufügen von gewissen Flächen, welche man leicht auf folgende Weise erhält: Man zeichne die Polarprojektion des Körpers und ziehe alle Zonenkreise, welche senkrecht zu vorhandenen Krystallkanten sind, vollständig aus; fasst man dann alle Schnittpunkte der Zonenkreise als Flächenpole auf, so bilden diese Flächen, wenn das Verhältnis ihrer Centraldistanzen richtig getroffen ist, einen Körper mit ununterbrochenem Zonenzusammenhang. Die Polarprojektion besteht aus lauter Dreiecken, mithin kann man die Pole (d. s. die Ecken von K') auf der Kugeloberfläche annehmen.

In Tafel VIII wurden die Zonen 001, 011, 111, 113 und die hierzu symmetrischen bezüglich den Symmetrieebenen des regulären Systems gezeichnet, deren Schnittpunkte die Flächen der Körper

$$\infty O \cdot O \cdot \infty O \infty \cdot 2O2 \cdot 4O4 \cdot \infty O3 \cdot 5O\tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{3}{2}O$$

entsprechen.

Aus der Polarprojektion können wir jetzt, wie oben angegeben, ein Bild des Körpers gewinnen, vergl. den vorderen rechten Quadranten der Figur. Man sieht daraus, dass die Flächen von $\frac{3}{2}O$ und $5O\frac{5}{2}$ zu sehr überwiegen, weshalb man ihre Kanten verschieben muss. (Vergl. die gestrichelten Kanten.)

Tafel IX giebt den gleichen Körper mit den gleichen Centraldistanzen in Parallelperspektive. Diese „gleiche Annahme" wurde bewirkt durch Benützung der dem Grundkreis entnommenen Längen und durch Bestimmung der wahren Länge der Kante vom Rhombendodekaëder und Pyramidenwürfel, sowie vom Oktaëder und Ikositetraëder.

Wir haben auf diese Weise eine sehr einfache Methode, um Körper mit ununterbrochenem Zonenzusammenhang zu gewinnen. Es möge hier noch auf die Verwendbarkeit der Tafel IX zur Uebung im Bestimmen von Parameterverhältnissen aus dem Zonenzusammenhang hingewiesen werden. Hat man Würfel und Oktaëder aus der Lage ihrer Flächen erkannt, so ergeben sich die Parameter aller anderen Flächen aus dem Zonenzusammenhang.

§ 26.

Andeutung weiterer Anwendungen der Flächenprojektion.

Ohne hier des näheren auf weitere spezielle Fälle der Anwendung der Flächenprojektion einzugehen, möge nur kurz darauf hingewiesen werden, wie geeignet die Flächenprojektion eines Krystalls ist, um in ihr weitere Eintragungen zu machen, z. B. um die bestäubten Gebiete von pyroëlektrischen Krystallen oder die Lage der optischen Axen oder endlich andere physikalische Vektorgrössen einzuzeichnen. Ueberall, wo es sich darum handelt, die Lage von bestimmten physikalisch ausgezeichneten

Richtungen gegenüber von Krystallflächen und Krystallkanten anzugeben, bietet die Flächenprojektion des Krystalls in Verbindung mit der Projektion der Schnittpunkte der den Richtungen entsprechenden Durchmesser mit der Kugel ein anschauliches Bild. Darin, dass die auf die angegebene Weise dargestellten Richtungen sich aus der Projektion unzweideutig ergeben, liegt ein grosser Vorteil vor der Anwendung der Parallelperspektive.

Die reciproken Beziehungen lassen sich natürlich auch veranschaulichen, wenn man nach der § 15 gegebenen Definition verfährt, jedoch die Kugel nicht stereographisch sondern gnomonisch projiciert. Da die stereographische Projektion wegen ihrer grösseren Anschaulichkeit für diese Zwecke den Vorzug verdient, wurde, um die Arbeit nicht zu sehr auszudehnen, nur diese behandelt.

Druck von J. B. Hirschfeld in Leipzig.

Erklärung zu Tafel I.

Konstruktion des zu $30\frac{3}{2}$ reciproken Körpers.

a. Fusspunkt T der von O auf die Fläche $ABC = 321$ gefällten Normale.

b. Verwandlung der Länge OS', gemessen nach b, in OS'' gemessen nach c.

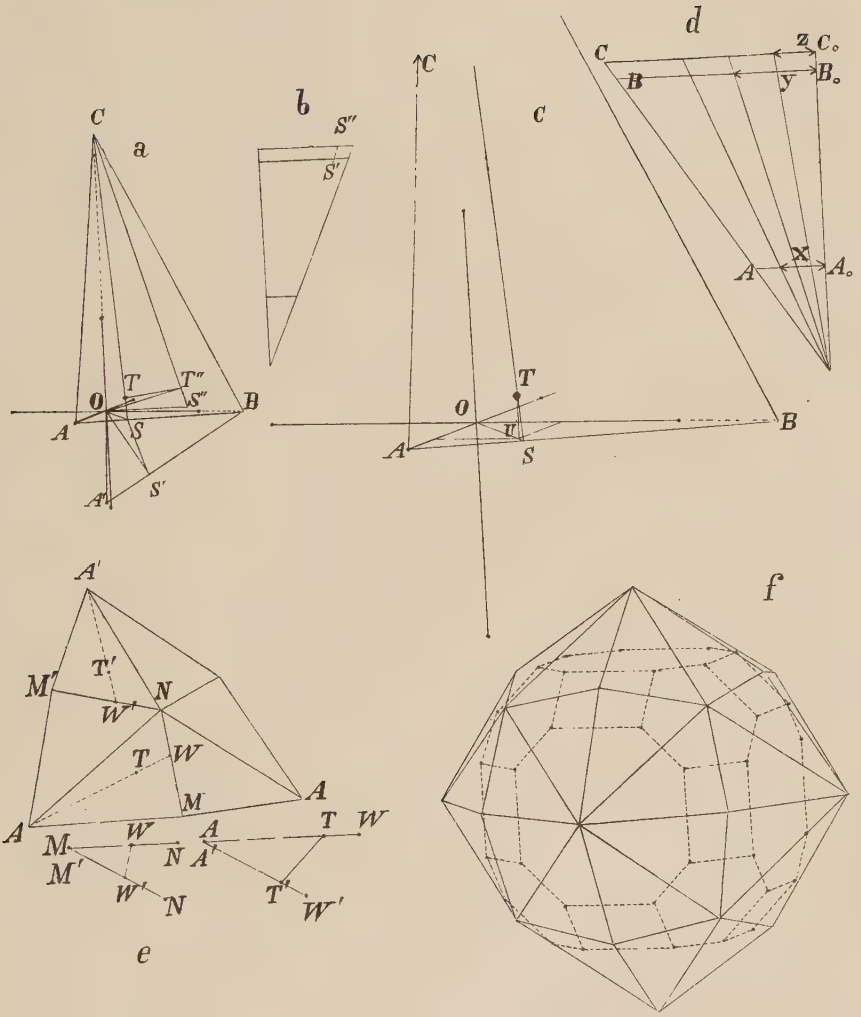
c. Coordinaten des Punktes T.

d. Bestimmung der Länge derselben mit Hilfe des Strahlenmassstabes.

e. Festlegung des Punktes T' durch Teilungsverhältnisse, wenn T bestimmt ist.

f. $30\frac{3}{2}$ (ausgezogen) und dessen reciproker Körper: $\infty 0 \infty \,.\, 0 \,.\, \infty 0$ (gestrichelt).

Tafel I



Erklärung zu Tafel II.

Fig. 1a.

Als Polarprojektion aufgefasst: Würfel, $\infty 0 \infty = (100)$

Als Flächenprojektion aufgefasst: Oktaëder, $0 = (111)$

Mittelpunkte: $0,0;\ \infty,0$.

Fig. 1b.

Oktaëder, $0 = (111)$

Würfel, $\infty 0 \infty = (100)$

Mittelpunkte: $1,0$.

Fig. 2a.

Als Polarprojektion: Würfel und Oktaëder
$\infty 0 \infty . 0 = (100).(111)$

Als Flächenprojektion: Rhombendodekaëder
$\infty 0 = (110)$

Mittelpunkte: $1,0;\ 1.\infty, 1.\infty$.

Fig. 2b.

Rhombendodekaëder
$\infty 0 = (110)$

Würfel und Oktaëder
im Gleichgewicht
$\infty 0 \infty . 0 = 0 . \infty 0 \infty = (100).(111)$

Mittelpunkte: $1,1$.

Fig. 3a.

Als Polarprojektion: Würfel und Oktaëder
$\infty 0 \infty . 0 = (100).(111)$

Als Flächenprojektion: Pyramidenoktaëder
$m0 = (hhk)$

Mittelpunkte: $0,0;\ 1,0;\ 1.\infty, 1.\infty;\ \infty,0$.

Fig. 3b.

Pyramidenoktaëder
$20 = (221)$

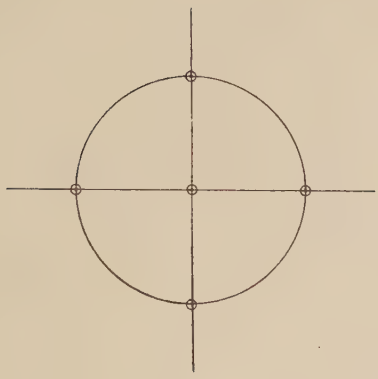
Würfel und Oktaëder
Würfel vorherrschend
$\infty 0 \infty . 0 = (100).(111)$

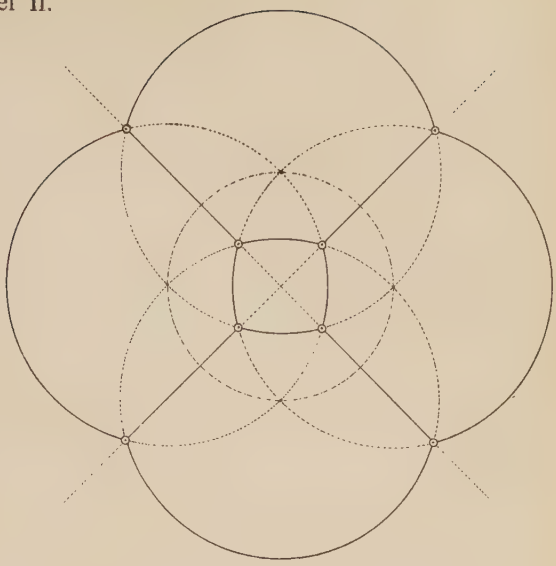
Mittelpunkte: $1,0;\ \frac{2}{3},\frac{2}{3};\ 1,\frac{3}{2}$.

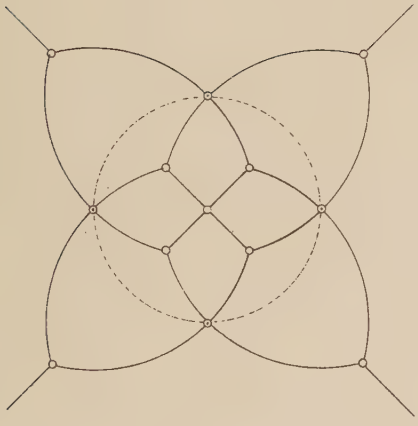
Die Erklärung und Nummer einer jeden Figur ist bei dieser und den folgenden Tafeln der entsprechenden Zeichnung gerade gegenübergestellt, sodass die Bezeichnung der Figuren auf der Tafel selbst als überflüssig fortgelassen wurde.

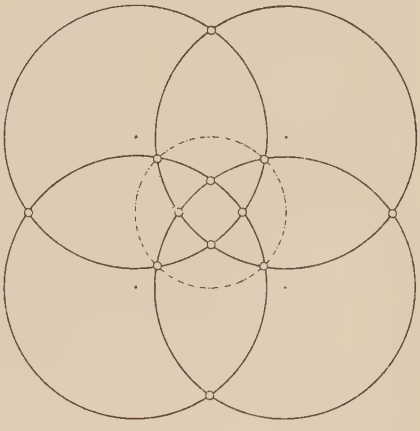
Die Grundkreise sind strichpunktirt. Die Pole durch Ringe, die Kreismittelpunkte durch Punkte angegeben. Die Zonenkreise sind, soweit sie die Flächenprojektion darstellen, ausgezogen, in Fig. 1b sind die übrigen Teile der Zonenkreise gestrichelt, in den anderen Figuren nicht angegeben.

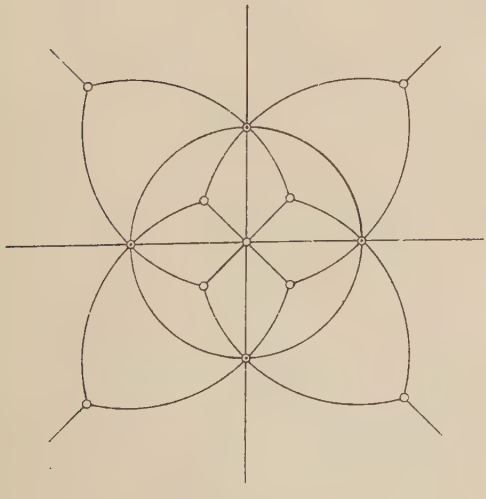
Tafel II.

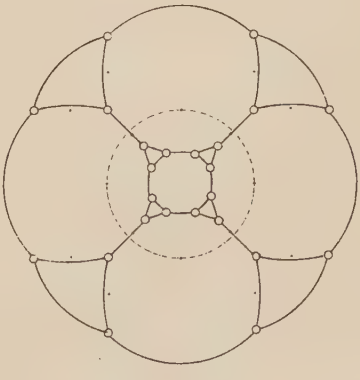












Erklärung zu Tafel III.

Fig. 1a.

Als Polarprojektion:

Würfel, Rhombendodekaëder und Oktaëder

$\infty 0 \infty . \infty 0 . 0 = (100) . (110) . (111)$

Als Flächenprojektion:

Ikositetraëder

$m\,0\,m = (h\,k\,k)$

Mittelpunkte: 1, 0; 0, 0; ∞, 0; 1.∞, 1.∞.

Fig. 1b.

Ikositetraëder

$2\,0\,2 = (211)$

Würfel, Rhombendodekaëder und Oktaëder im Gleichgewicht

$\infty 0 \infty . \infty 0 . 0 = (100) . (110) . (111)$

Mittelpunkte: 2.0; $\frac{1}{2}$, 0; $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$; 3, 1.

Fig. 1c.

Erläutert die Konstruktion der Mittelpunkte der *Fig. 1b.* Die Quenstedt'sche Projektion von zwei gegenüberliegenden Oktanten des Ikositetraëders liefert als Schnittpunkte die mit Ring und Punkt bezeichneten Mittelpunkte der Kantenkreise des reciproken Körpers.

Fig. 1d

zeigt, wie der wirre Knäuel von Zonen des Ikositetraëders 2 0 2 durch Einzeichnen der Flächenprojektion des reciproken Körpers eine so übersichtliche Gestalt annimmt. Sämmtliche Zonen (schwach ausgezogen) gehören ein Stück weit der Flächenprojektion (stark ausgezogen) an und sind also durch diese bestimmt.

Fig. 2a.

Als Polarprojektion:

Oktaëder und Würfel

$0 . \infty 0 \infty = (111) . (100)$

Als Flächenprojektion:

Pyramidenwürfel

$\infty 0\,m = (h\,k\,0)$

Mittelpunkte: 1, 0; 1.∞, 1.∞.

Fig. 2b.

Pyramidenwürfel

$\infty 0\,2 = (210)$

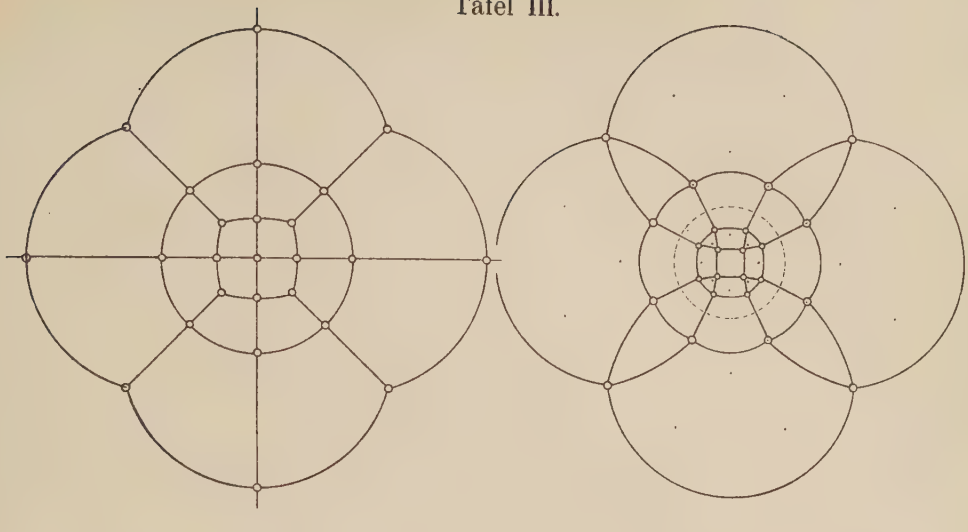
Oktaëder und Würfel

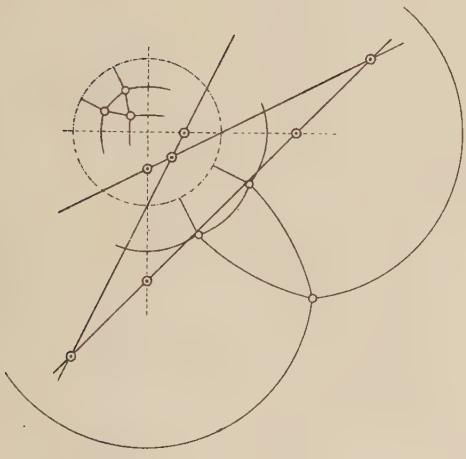
Oktaëder vorherrschend

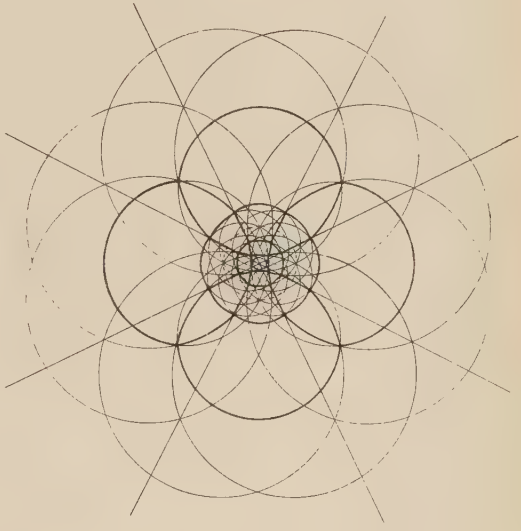
$0 . \infty 0 \infty = (111) . (100)$

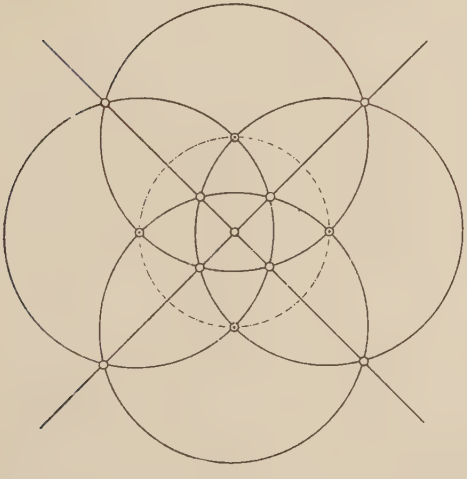
Mittelpunkte: 2, 2; 1, $\frac{1}{2}$; 0, 0 und ∞, 0.

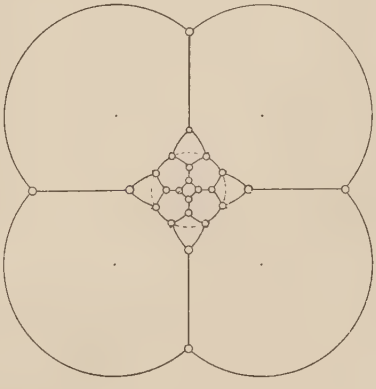
Tafel III.











Erklärung zu Tafel IV.

Fig. b.

Als Polarprojektion aufgefasst:

Achtundvierzigflächner $30\frac{3}{2} = (321)$

Als Flächenprojektion aufgefasst:

Würfel, Oktaëder und Rhombendodekaëder.

$\infty 0 \infty \,.\, 0 \,.\, \infty 0 = (100) \,.\, (111) \,.\, (110)$

Koordinaten der Kreismittelpunkte:

Kante	Mittelpunkt
Würfel : Oktaëder	$1,1$
Würfel : Rhombendodekaëder	$\frac{3}{5},0;\ \frac{3}{4},0;\ 3.\infty\ ,2.\infty$
Oktaëder : Rhombendodekaëder	$\frac{1}{5},\frac{1}{5};\ 5,1$

Von den Kanten zwischen Würfel und Oktaëder liegen je sechs in der Projektion auf einem Kreis, da die Pole, welche durch diese Kanten verbunden werden, in einer Zone liegen, z. B. $3,\bar{2},1;\ 3,\bar{1},2;\ 2,1,3;\ 1,2,3;\ \bar{1},3,2;\ \bar{2},3,1$.

Fig. a.

Als Polarprojektion aufgefasst:

$\infty 0 \infty \,.\, \infty 0 \,.\, 0 = (100) \,.\, (110) \,.\, (111)$

Als Flächenprojektion aufgefasst:

Achtundvierzigflächner $m\,0\,n$, $(h\,k\,l)$

Koordinaten der Kreismittelpunkte:

$0,0;\ \infty,0;\ 1,0;\ 1.\infty,1,\infty.$

Fig. c.

Als Polarprojektion aufgefasst:

Achtundvierzigflächner $402 = (421)$

Als Flächenprojektion aufgefasst:

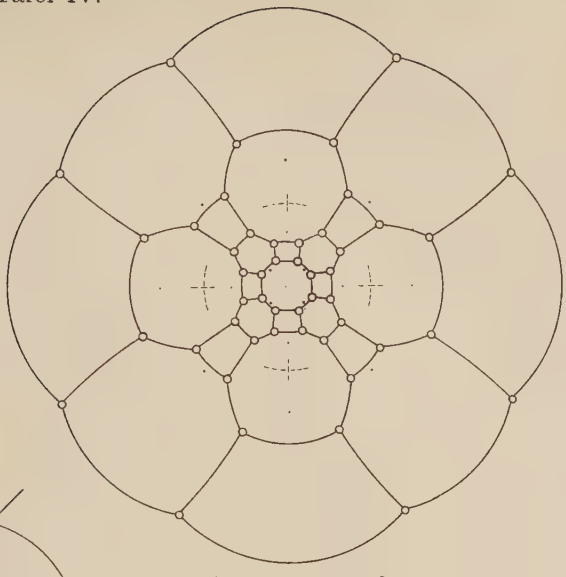
Würfel, Oktaëder und Rhombendodekaëder

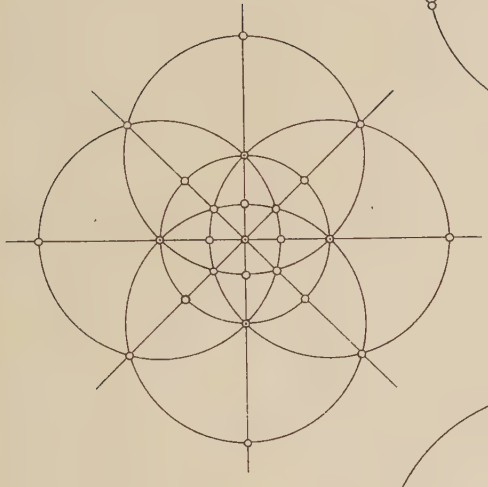
$\infty 0 \infty \,.\, \infty 0 \,.\, 0 = (100) \,.\, (110) \,.\, (111)$

Koordinaten der Kreismittelpunkte:

Kante	Mittelpunkt
Würfel : Oktaëder	$\frac{4}{3},\frac{4}{3};\ 1,\frac{3}{4}$
Würfel : Rhombendodekaëder	$2,0;\ \frac{1}{2},0;\ 2.\infty,1.\infty$
Oktaëder : Rhombendodekaëder	$\frac{1}{6},\frac{1}{6};\ 6,1$

Tafel IV.





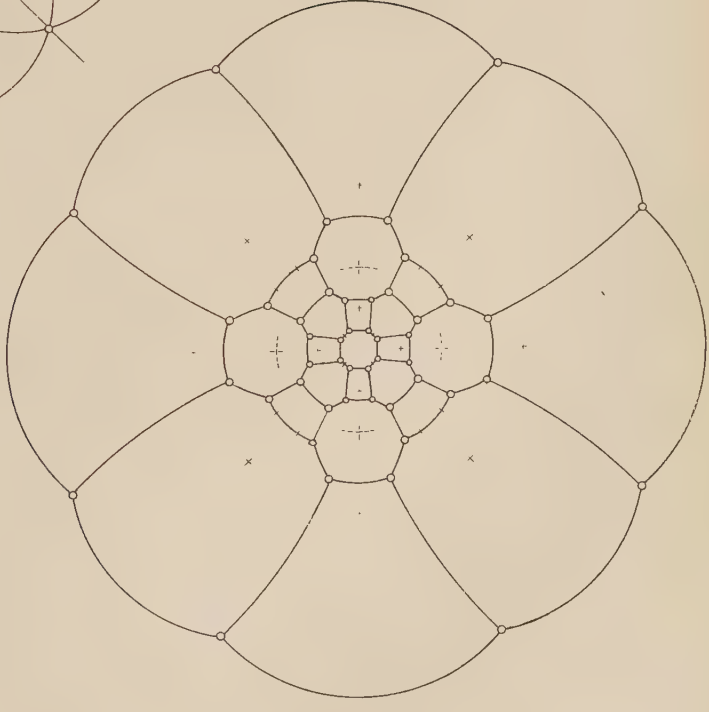


Fig. 2d.

Konstruktion des Gyroëders.

In nachfolgender Tabelle sind unter *I* die reciproken Körper, unter *II* deren in der Figur angegebenen Sektionslinien durch ihre Axenabschnitte und unter *III* die Kreismittelpunkte genannt, welche sich als Schnitt der durch Klammern verbundenen Sektionslinien ergeben.

I	*II*	*III*
Würfel	$\infty, 0$	
$\infty 0 \infty$	$0, \infty$	$1, 0$
Oktaëder 0	$1, 1$	
Gyroëder	$5, \frac{5}{3}$	
$\frac{5\,0\,\frac{5}{3}}{2}$	$\frac{3}{5}, 3$	
	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}, 0$ $0, 3$ $0, 1$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

Die Kreise des einen Quadranten gehören einem linken, die des andern einem rechten Gyroëder an.

Fig. 1.

Achtundvierzigflächner

$m\,0\,n = (h\,k\,l)$

Kreismittelpunkte: $0, 0$; $\infty, 0$; $1, 0$, $1.\infty$ $1, \infty$.

Dadurch, dass in gewisser Gesetzmässigkeit die Hälfte der Flächen verschwindet, die andere wächst, entstehen die Hemiëdrien Fig. 2 und folgende, bei welchen diese Gesetze erläutert sind.

Fig. 5.

Tetartoëder $+ l \frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{4} = \pi\,\tau\,(321)$

(Diese Figur schliesst sich an die Figuren 4a—c der Tafel VI an).

$12\,F\,(5)$

$4\,E\,(3)$, (grosse Ringe) haben die Stelle von Tetraëderpolen $\frac{0}{2}$, es sind die gleichen Ecken wie beim Achtundvierzigflächner.

$4\,E'\,(3)$, (kleine Ringe) h. d. St. von Tetraëderpolen $-\frac{0}{2}$.

$12\,E''\,(3)$, (mittlere Ringe) h. d. St. von Tetartoëderpolen $-l\,\frac{5\,0\,\frac{5}{2}}{2}$.

$12\,K\,\{F:F, E:E''\}$ (stark ausgezogen), sind die gleichen wie beim Gyroëder und Diploëder.

$12\,K\,\{F:F, E':E''\}$, (punktirt);

$6\,K\,\{F:F, E'':E''\}$, (gestrichelt).

Fig. 2a.[1]

Pyritoëdrische Hemiëdrie.

Innerhalb der Oktanten verhalten sich die abwechselnden Flächen gleich und an der Grenze die anstossenden.

Aus $3\,0\,\frac{3}{2}$ enstehen zwei Diploëder $l\left[\frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2}\right]$ und $r\left[\frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2}\right]$ beim Wachsen bezw. Verschwinden der schraffirten[2] Flächen.

Änderung des Vorzeichens durch Drehung wie bei der Tetraëdrischen Hemiëdrie.

Fig. 2b.

Gyroëdrische Hemiëdrie.

Sämmtliche abwechselnden Flächen des Achtundvierzigflächners verhalten sich gleich.

Es entstehen zwei enantiomorphe Gyroëder, $l\,\frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2}$ beim Wachsen, $r\cdot\frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2}$ beim Verschwinden der schraffirten Flächen.

Das Spiegelbild eines rechten Gyroëders in Bezug auf eine Axenebene giebt ein linkes. Das Gleiche gilt auch für die Projektion in Bez. auf die Ebenen ac u. bc.

Fig. 2c.

Tetraëdrische Hemiëdrie.

Sämmtliche Flächen in den abwechselnden Oktanten verhalten sich gleich.

Aus dem Achtundvierzigflächner (Hexakisoktaëder) $3\,0\,\frac{3}{2}$ entsteht das Hexakistetraëder $+\,\frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2}$ beim Wachsen der schraffirten Flächen oder $-\,\frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2}$ beim Verschwinden derselben.

Dreht man den positiven Körper um eine Hauptaxe um 90^0, so entsteht ein negativer. Das Gleiche gilt auch für die Projektion bei einer Drehung um die Axe c.

---

1) Vergleiche auch die Bemerkungen zu den Figuren 3 der Tafel V.

2) In den beistehenden Zeichnungen wurden stets die schraffirten Flächen als die wachsenden, die unschraffirten als die verschwindenden angenommen.

Tafel V.

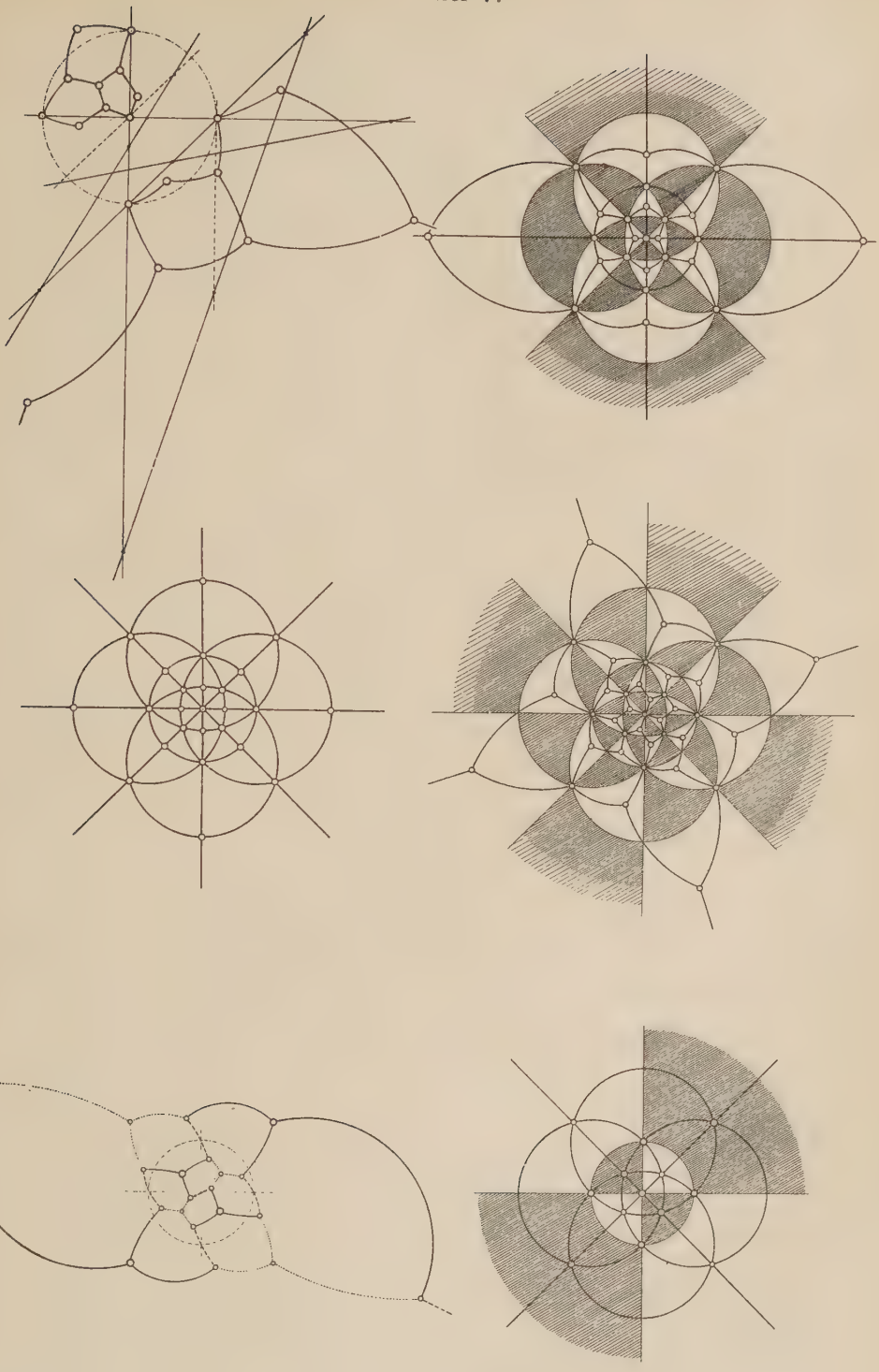


Fig. 3a.

Diploëder $+\left[\frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2}\right] = \pi\,(321)$

(Diakisdodekaëder)

$24\,F\,(4)$

$6\,E\,(4)$, (grosse Ringe m. P.) } hab. gl. Stelle
$8\,E\,(3)$, (grosse Ringe) } wie bei $3\,0\,\frac{3}{2}$

$12\,E'\,(4)$, (kleine Ringe)

$12\,K\left\{F:F,E\,(4):E'\,(4)\right\}$ (ausgezogen) ursprüngliche Kanten des Achtundvierzigflächners.

$12\,K\left\{F:F,E'\,(4):E\,(4)\right\}$ (gestrichelt) beide Kanten mit den gleichen Mittelpunkten: $0\,,0;\ \infty\,,0$

$24\,K\left\{F:F,E\,(3):E'\,(4)\right\}$ Mittelpunkte: $\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2};\ 2\,,1$

Das Diploëder ist symmetrisch zu den Hauptsymmetrie-Ebenen, die Projektion zu a und b, die Kantenkreis-Mittelpunkte zu a, b und deren Halbirenden.

Fig. 3b.

Gyroëder $l\,\frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2} = \gamma\,(321)$

$24\,F(5)$; $6\,E(4)$, gr. Rge. m. P., $8\,E(3)$, gr. R.
$24\,E'\,(3)$, kl. Rge. **Mittelpunkte:**

$24\,K\left\{F:F,E\,(4):E'\,(3)\right\}$ gestr.; $\frac{1}{3}\,,0;\ 3,0;\ 3\infty\,,1.\infty$.

$24\,K\left\{F:F.E\,(3):E'\,(3)\right\}$ fein pkt. $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2};\ 2\,,1$.

$12\,K\left\{F:F,E'\,(3):E'\,(3)\right\}$ strich-punkt. $\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2};\ 2\,,1$.

Keine der ursprünglichen Kanten des Achtundvierzigflächners blieb erhalten. Keine S. E. weder beim Körper noch in der Projektion. Kantenkr.-Mittelpunkte sym. zu a, b und deren Halbirenden.

Fig. 3c.

Hexakistetraëder $+\frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2} = \tau\,(321)$

$24\,F\,(3)$; $6\,E\,(4)$ gr. Rge. m. P., sowie $4\,E\,(6)$ gr. R. sind die gleichen Ecken wie beim Achtundvierzigflächner. $4\,E'\,(6)$ kl. Rge. hat nur in der Projektion die gleiche Lage wie beim Actundvierzigflächner.

$12\,K\left\{F:F,E\,(4):E\,(6)\right\}$ } ausgezogen,
$12\,K\left\{F:F,E\,(6):E'\,(6)\right\}$ } ursprüngl. Kanten.

$12\,K\left\{F:F,E\,(4):E'\,(6)\right\}$, gestrichelt.

Der Körper ist sym. zu den sechs durch Oktaëderpol und Hauptaxe gehenden Ebenen, die Projektion zu den Halbirenden von a und b und (abgesehen von der Art des Ausziehens) zu diesen selbst. Desgleichen die Kantenkreis-Mittelpunkte.

Fig. 4a.

Pyritoëdrische u. hierauf Tetraëdrische Hemiëdrie.

Die in abwechselnden Oktanten liegenden Diploëderflächen verhalten sich gleich.

Aus $l\ \left[\frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2}\right]$ wird $\begin{matrix}+l\\-r\end{matrix}\ \frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{4}$

„ $r\ \left[\frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2}\right]$ „ $\begin{matrix}+r\\-l\end{matrix}\ \frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{4}$

Die gemeinsamen Mittelpunkte sind mit Kreisen versehen.

Fig. 4b.

Gyroëdrische und hierauf Tetraëdrische Hemiëdrie.

Die in abwechselnden Oktanten liegenden Flächen des Gyroëders verhalten sich gleich.

Aus $l\ \frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2}$ wird $\pm l\ \frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{4}$

„ $r\ \frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{2}$ „ $\pm r\ \frac{3\,0\,\frac{3}{2}}{4}$

Die gemeinsamen Mittelpunkte sind mit Kreisen versehen.

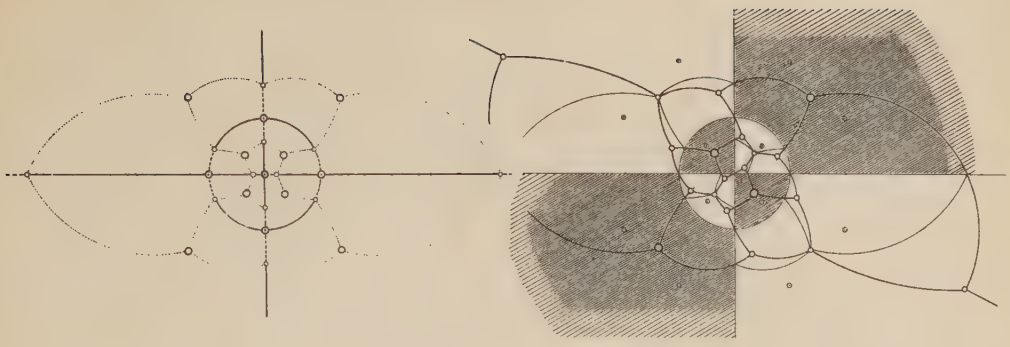
Fig. 4c.

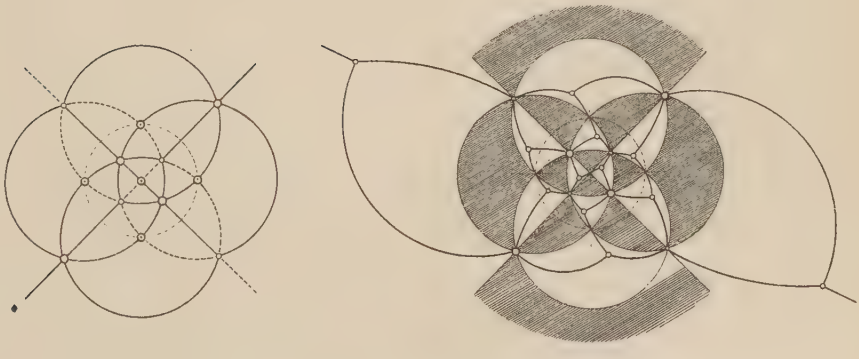
Tetraëdrische und hierauf Pyritoëdrische Hemiëdrie, und Tetraëdrische und hierauf Gyroëdrische Hemiëdrie

werden durch die gleiche Figur dargestellt.

Es möge hier das weniger anschauliche Aufeinanderfolgen der Pyritoëdrischen und Gyroëdrischen Hemiëdrie in der genannten und in umgekehrter Reihenfolge erwähnt werden. Für den ersten Fall dient Fig. 4a, für den zweiten Fig. 4b. Es entsteht, abgesehen vom Vorzeichen, immer der gleiche Körper, sodass dieser also erhalten wird, sobald wir zwei beliebige Hemiëdrien des regulären Systems verbinden.

Tafel VI.





Erklärung zu Tafel VII.

Fig. 1.

Zwölfseitige Pyramide.

$24\,F(3)$; $2\,E(12)$; $6\,E(4)$; $6\,E'(4)$;
$12\,K\{F:F, E(4):E'(4)\}$ Mittelpunkt: $0,0$.
$12\,K\{F:F, E(12)\,E:(4)\}$
$12\,K\{F:F, E(12)\,E':(4)\}$
Durch die a-Axen bez. Zwischenaxen dargestellt.

Fig. 2a.

Pyramidale Hemiëdrie.

Zwei in der gleichen Seitenkante zusammenstossende Flächen verhalten sich gleich und verschieden von den anliegenden.

Fig. 2b.

Rhomboëdrische Hemiëdrie.

Sämmtliche in abwechselnden Dodekanten liegenden Flächen verhalten sich gleich.

Fig. 2c.

Trapezoëdrische Hemiëdrie.

Die abwechselnden Flächen der zwölfseitigen Pyramide verhalten sich gleich.

Fig. 3a.

Sechsseitige Pyramide der Zwischenstellung.

$12\,F(3)$; $6\,E(4)$; $2\,E(6)$;
$6\,K\{F:F, E(4):E(4)\}$, Mp.: $0,0$
$12\,K\{F:F, E(6):E(4)\}$ verbindet den Mittelpunkt $0,0$ mit $1,2$ (schiefwink. Koordinaten, auf die a-Axen bezogen).

Fig. 3b.

Skalenoëder.

$12\,F(3)$; $6\,E(4)$; $2\,E(6)$;
$6\,K\{F:F, E(4):E(4)\}$ ausgezogen
Mp.: $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ (bezogen auf die Axen a) oder $\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0$ (bezogen auf die Zwischenaxen);
$6\,K\{F:F, E(6):E(4)\}$ ausgezogen;
$6\,K'\{F:F, E(6):E(4)\}$ gestrichelt.

Fig. 3c.

Trapezoëder (hemiëdrisches).

$12\,F(4)$; $12\,E(3)$; $2\,E(6)$;
$6\,K\{F:F, E(3):E(3)\}$
Mp.: $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ (a-Axen- oder $\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0$ (Zwischenax.);
$6\,K'\{F:F, E(3):E(3)\}$
Mp.: $1,0$ (a-Axen);
$12\,K\{F:F, E(6):E(3)\}$.

Fig. 4a.

Pyramidale +Rhomb. Hemiëdrie.

Die in abwechselnden Dodekanten liegenden Flächen der sechsseitigen Pyramide der Zwischenstellung verhalten sich gleich.

Fig. 4b. | Fig. 4b'.

Rhomboëdrische +Pyramidale Hemiëdrie. | +Trapezoëdrische Hemiëdrie.

Die an einer Seitenkante zusammenstoss. Flächen des Skalenoëders verhalten sich ungleich | gleich und verschieden von den anliegenden Flächen.

Fig. 4c.

Trapez. +Rhomboëdr. Hemiëdrie.

Die in abwechselnden Dodekanten liegenden Flächen des hemiëdrischen Trapezoëders verhalten sich gleich.

Fig. 5ab.

Rhomboëdrische Tetartoëdrie.
Rhomboëder der Zwischenstellung.

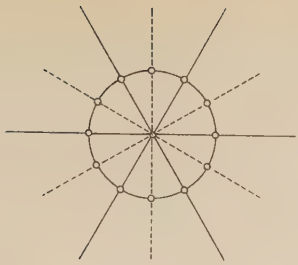
$6\,F(4)$; $6\,E'(3)$; $2\,E(3)$;
$6\,K\{F:F, E'(3):E'(3)\}$ Mp.: $\frac{4}{3}, \frac{1}{3}$ (a-Axen);
$6\,K\{F:F, E(3):E'(3)\}$ Halbiren die Kantenwinkel der Fig. 3a.

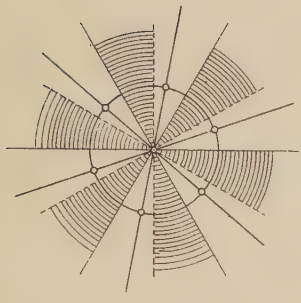
Fig. 5b'c.

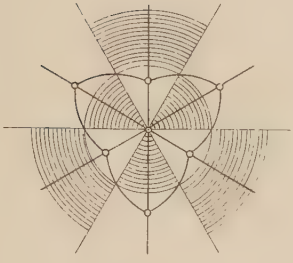
Trapezoëdrische Tetartoëdrie.
Trapezoëder (tetartoëdrisches).

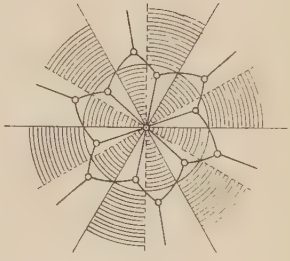
$6\,F(4)$; $6\,E'(3), 2\,E(3)$
$3\,K\{F:F, E'(3):E(3)\}$ Mp.: $\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$ (a-Axen) $= \frac{4}{3}\sqrt{3}, 0$ (Zwischenaxen)
$3\,K'\{F:F, E'(3):E'(3)\} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0$ (Zwischenaxen);
$6\,K\{F:F, E(3):E'(3)\}$

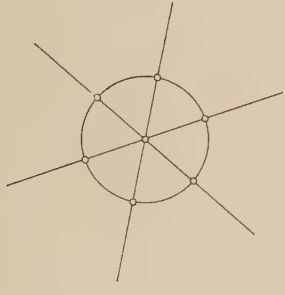
Die Koordinaten sind schiefwinkelige ($\alpha = 60^0$) mit den a-Axen oder den Zwischenaxen als Koordinatenaxen. Die Kreismittelpunkte sind ausserdem in der Zeichnung angegeben.

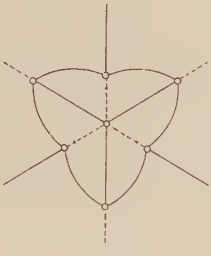


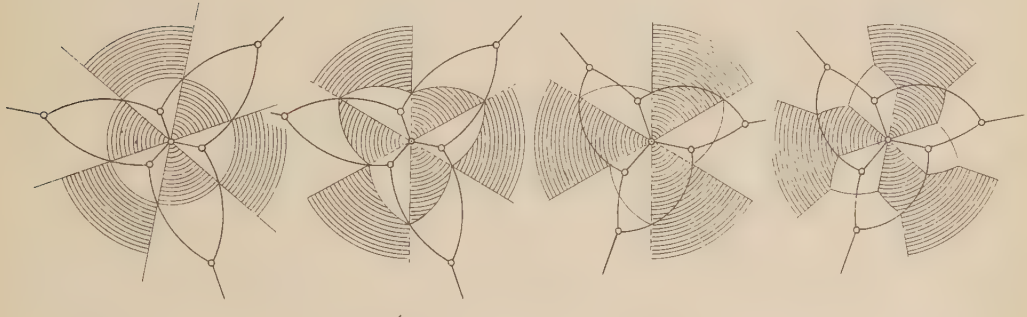


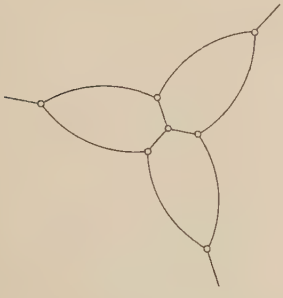


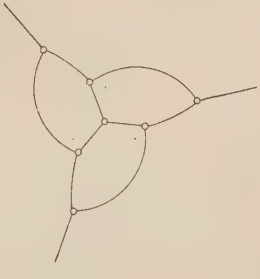


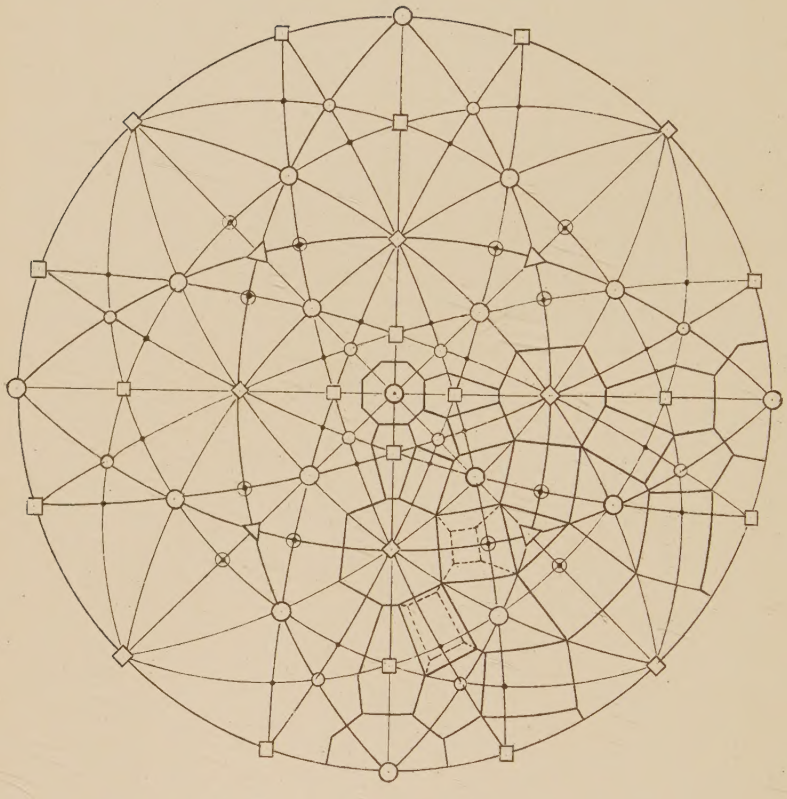






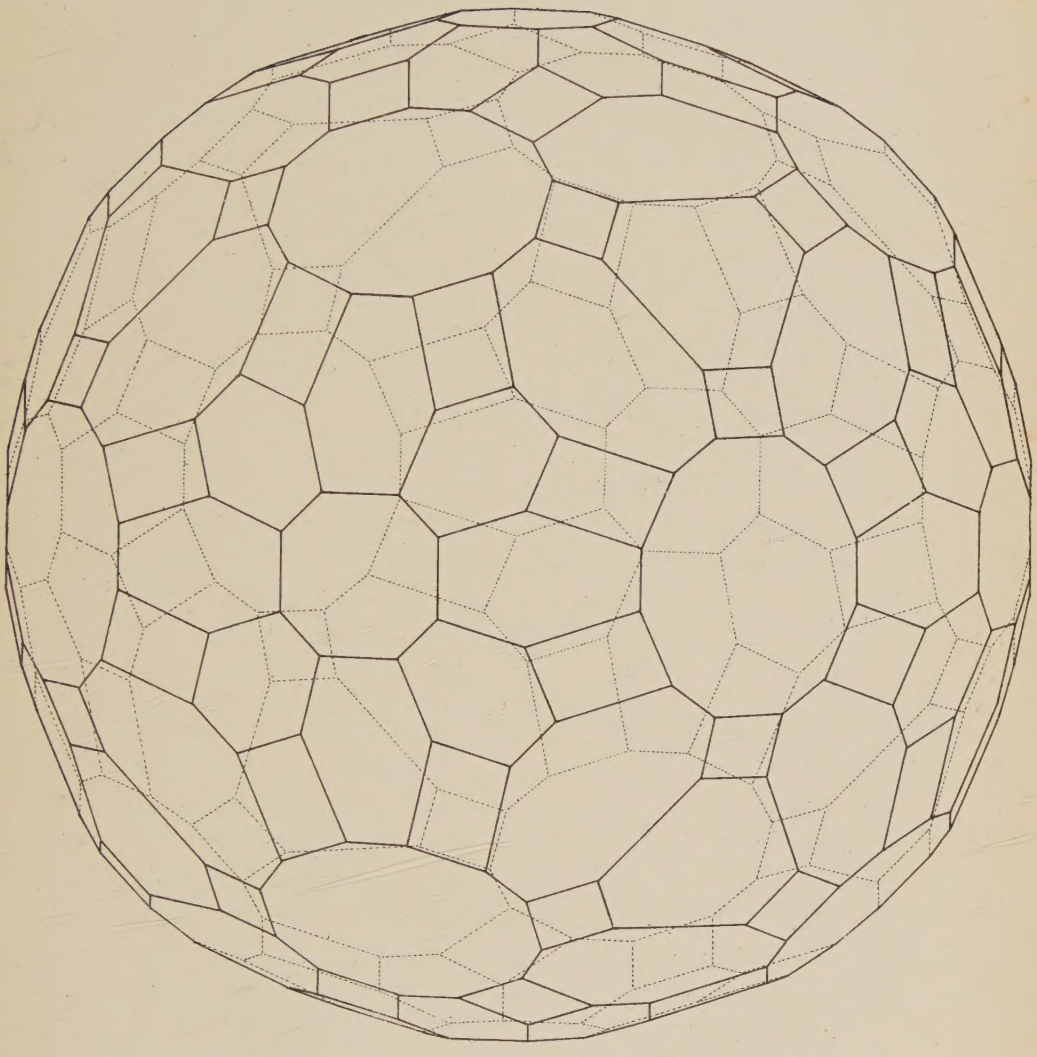






Körper mit ununterbrochenem Zonenzusammenhang.

$$\infty 0\,.\,0\,.\,\infty 0\infty\,.\,2\,0\,2\,.\,4\,0\,4\,.\,\infty 0\,3\,.\,5\,0\,2\,.\,\tfrac{3}{2}\,0$$

In Polar- und teilweise in Flächenprojektion . . . . . Tafel VIII.
In axionometrischer Projektion . . . . . Tafel IX.

Tafel IX.